

Vorkurs Theoretische Informatik

Einführung in Mengenlehre, Aussagenlogik und Beweise

reloading 0 % complete...

Arbeitskreis Theo-Vorkurs

Dienstag, 30. September 2025

Fachgruppe Informatik Universität Stuttgart

Aktuelle Folien:





Your Studiengang ran into a problem and needs to be restructured.
We're working on a **Vorkurs Theoretische Informatik** for you.

30.9.2025% complete



Aktuelle Folien

Einführung in Mengenlehre, Aussagenlogik und Beweise

Allgemeines

reloading 0 % complete...

- Nützliche Links:
 - Fachgruppe Informatik:
<https://fius.de/>
 - Handouts und Foliensätze:
<https://fius.de/index.php/studien-interessierte/vorkurs-theoretische-informatik/>
 - Ersti Telegram-Gruppe:
 <https://t.me/+Uk7ZFG3WlWkxMzYy>
- E-Mail der Fachgruppe: fius@informatik.uni-stuttgart.de

1. Allgemeines

2. Theoretische Informatik

Anwendung

Theoretische Informatik in deinem Studium

3. Mengen

Grundlagen

Mengenschreibweise

Mengenoperationen

4. Aussagenlogik

5. Quantoren

6. Beweisen

Beweisbeispiel: Transitivität der Teilmenge

7. Wiederholung

Theoretische Informatik

reloading 4 % complete...

Was ist eigentlich Theoretische Informatik?

- Theoretische Informatik ist die **formale** Herangehensweise an Probleme.
- Grundlage für viele andere Gebiete der Informatik

- Ist ein bestimmtes Problem lösbar, oder **können** wir gar keine Lösung finden?
- IT-Sicherheit / Kryptographie: Die Sicherheit bestimmter Algorithmen **beweisen**
- Reguläre Ausdrücke
- Künstliche Intelligenz
- Compilerbau
- ...und vieles mehr...

Logik und diskrete Strukturen ist Orientierungsprüfung für Informatik, Medieninformatik, Softwaretechnik und Data Science.

- Du musst diese Prüfung spätestens zum Ende des dritten Semester bestanden haben.
- Du musst spätestens zum Ende des zweiten Semesters eine der beiden Orientierungsprüfungen angetreten haben.
- Du kannst die schriftliche Prüfung einmal nachschreiben und hast dann noch einen mündlichen Versuch im selben Semester.

Kennt eure Prüfungsordnung!

- Theoretische Informatik I
Logik und diskrete Strukturen
Dozent: Dr. Manfred Kufleitner
- Theoretische Informatik II
Formale Sprachen und Berechnbarkeit
Dozent: Dr. Manfred Kufleitner
- Theoretische Informatik III
Algorithmik und Komplexitätstheorie
Dozent: Prof. Stefan Funke

Altklausuren helfen bei der Prüfungsvorbereitung.

Fragt auch nach den Klausuren des alten Fachs.

Ihr seid die Ersten, die die umstrukturierten Theo-Fächer hören. Die vorhandenen Altklausuren passen vmtl. nicht auf die neue Strukturen.

Mengen



Grundlagen

- Was ist eine Menge?

- Was ist eine **Menge**?
- Eine Menge
 - ist eine **Sammlung von Zeugs**
 - ist unsortiert
 - enthält keine Duplikate
 - wird mit geschweiften Klammern notiert

Beispiel

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ = Menge der Natürlichen Zahlen

Studierende = {Georg, Tim, Triin, Seb, Babett, ...}

$\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2, 1, 1, 1\}$

$\emptyset = \{\} =$ leere Menge

- Was ist eine Menge?
- Was ist ein Element?

- Was ist eine Menge?
- Was ist ein Element?
- Ein Element ist ein Ding aus einer Menge.

Beispiel

1 ist ein Element der **Natürlichen Zahlen**

$$1 \in \mathbb{N}$$

Tim ist ein Element aus der Menge der **Studierenden**

$$\mathbf{Tim} \in \mathbf{Studierende}$$

a ist in der Menge $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ nicht enthalten

$$\mathbf{a} \notin \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$$

- Was ist eine Menge?
- Was ist ein Element?
- Was ist eine **Teilmenge**?

- Was ist eine Menge?
- Was ist ein Element?
- Was ist eine **Teilmenge**?
- Eine Teilmenge ist eine **spezielle Auswahl** von Elementen einer Menge.

Beispiel

$\{1, 2, 3\}$ ist eine Teilmenge der Natürlichen Zahlen

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$$

{Julian} ist eine Teilmenge der **Studierenden**

$$\{\text{Julian}\} \subseteq \text{Studierende}$$

- ist $\{A, B\}$ eine Teilmenge von $\{A, B\}$?

- ist $\{A, B\}$ eine Teilmenge von $\{A, B\}$?
- Ja!

- ist $\{A, B\}$ eine Teilmenge von $\{A, B\}$?
- Ja!
- Aber keine echte Teilmenge

- ist $\{A, B\}$ eine Teilmenge von $\{A, B\}$?
- Ja!
- Aber keine echte Teilmenge

Beispiel

$N \subseteq M$: N ist eine Teilmenge von M aber darf auch M sein.

$N \subset M$: N ist eine Teilmenge von M und muss mindestens 1 Element weniger enthalten. $N \subsetneq M$ bedeutet das selbe wie $N \subset M$, aber ist etwas expliziter.

Aufgaben

Nenne jeweils 5 Elemente der folgenden Mengen:

Normal

- $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
- $\{0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$
- $\mathbb{N}$

Nenne 5 Teilmengen die keine gegenseitigen Teilmengen sind

Etwas schwerer

- $M = \{\text{🍷}, \text{🍷}, \text{🚂}, \text{📱}, \text{📺}\}$
- $M = \{\text{Lisa}, \text{Tobi}, \text{Fabian}, \text{Linus}\}$

Mögliche Lösungen sind ...

- $a, b, c, d, e \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Mögliche Lösungen sind ...

- $a, b, c, d, e \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
- $0, 2, 4, 8, 16, \in \{0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$

Mögliche Lösungen sind ...

- $a, b, c, d, e \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
- $0, 2, 4, 8, 16, \in \{0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$
- $0, 1, 2, 3, 4 \in \mathbb{N}$

Mögliche Lösungen sind ...

- $a, b, c, d, e \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
- $0, 2, 4, 8, 16, \in \{0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$
- $0, 1, 2, 3, 4 \in \mathbb{N}$
- $\{\text{📄}\}, \{\text{📧}\}, \{\text{🖨️}\}, \{\text{📱}\}, \{\text{📄40}\}$

Mögliche Lösungen sind ...

- $a, b, c, d, e \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
- $0, 2, 4, 8, 16, \in \{0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$
- $0, 1, 2, 3, 4 \in \mathbb{N}$
- $\{\text{📄}\}, \{\text{✉️}\}, \{\text{🖨️}\}, \{\text{📱}\}, \{\text{💻}\}$
- $\{\text{Lisa, Tobi}\}, \{\text{Lisa, Fabian}\}, \{\text{Lisa, Linus}\}, \{\text{Tobi, Fabian}\}, \{\text{Linus, Tobi}\}$

Mengen



reloading 20 % complete...

Mengenschreibweise

$$M = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Die Menge M enthält alle Elemente $2n$, **für die gilt**: n stammt aus der Menge der natürlichen Zahlen.

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

Achtung

In der theoretischen Informatik enthält $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen) die Zahl 0.

- Mengenbeschreibungen können auch Sätze enthalten:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{x \mid x \text{ ist gerade}\} \\ &= \{x \mid \text{Es gibt eine Zahl } k \in \mathbb{N} : 2k = x\} \end{aligned}$$

- Mengenbeschreibungen können auch Sätze enthalten:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{x \mid x \text{ ist gerade}\} \\ &= \{x \mid \text{Es gibt eine Zahl } k \in \mathbb{N} : 2k = x\} \end{aligned}$$

- Mengenbeschreibungen können Formeln sein:

$$M_2 = \{n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{3, 4, 7, 12, \dots\}$$

- Mengenbeschreibungen können auch Sätze enthalten:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{x \mid x \text{ ist gerade}\} \\ &= \{x \mid \text{Es gibt eine Zahl } k \in \mathbb{N} : 2k = x\} \end{aligned}$$

- Mengenbeschreibungen können Formeln sein:

$$M_2 = \{n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{3, 4, 7, 12, \dots\}$$

- Auch im Beschreibungsteil können Formeln stehen:

$$M_3 = \{x \mid x = n^2 \text{ und } n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$$

- Mengenbeschreibungen können auch Sätze enthalten:

$$\begin{aligned}M_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{x \mid x \text{ ist gerade}\} \\ &= \{x \mid \text{Es gibt eine Zahl } k \in \mathbb{N} : 2k = x\}\end{aligned}$$

- Mengenbeschreibungen können Formeln sein:

$$M_2 = \{n^2 + 3 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{3, 4, 7, 12, \dots\}$$

- Auch im Beschreibungsteil können Formeln stehen:

$$M_3 = \{x \mid x = n^2 \text{ und } n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$$

- Es können mehrere Beschreibungen gleichzeitig verwendet werden:

$$M_4 = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n > 15, n < 20\} = \{16, 17, 18, 19\}$$

Aufgaben

Findet Elemente aus den folgenden Mengen

Normal

- $M_1 = \{a\}$
- $M_2 = \{u + v \mid u \in \{1, 2\}, v \in \{7, 9\}\}$
- $M_3 = \{w \mid |w| = 3\}$
- $M_4 = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

Etwas Schwerer

- $M_5 = \{3^n \mid n \equiv 1 \pmod{3}, n \in \mathbb{N}\}$
- $M_6 = \{x \mid |x^2| = x^2 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$
- $M_7 = \{w \mid w \text{ ist prim, } w > 50\}$

Anmerkung: $x \equiv y \pmod{n} \iff n \text{ teilt } (x - y) \text{ ohne Rest} \iff x = m \cdot n + y \text{ mit } x, y, n, m \in \mathbb{Z}$

- M_1 : Enthält **nur** das einzelne Element a

- M_1 : Enthält **nur** das einzelne Element a
- $M_2 = \{8, 10, 9, 11\}$

Wort besteht aus zwei Teilen, die addiert werden:

u ist entweder 1 oder 2, v ist entweder 7 oder 9!

- M_1 : Enthält **nur** das einzelne Element a

- $M_2 = \{8, 10, 9, 11\}$

Wort besteht aus zwei Teilen, die addiert werden:

u ist entweder 1 oder 2, v ist entweder 7 oder 9!

- $M_3 = \{3, -3\}$

Enthält alle Zahlen mit dem Betrag 3.

- M_1 : Enthält **nur** das einzelne Element a

- $M_2 = \{8, 10, 9, 11\}$

Wort besteht aus zwei Teilen, die addiert werden:

u ist entweder 1 oder 2, v ist entweder 7 oder 9!

- $M_3 = \{3, -3\}$

Enthält alle Zahlen mit dem Betrag 3.

- $M_4 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

- M_1 : Enthält **nur** das einzelne Element a

- $M_2 = \{8, 10, 9, 11\}$

Wort besteht aus zwei Teilen, die addiert werden:

u ist entweder 1 oder 2, v ist entweder 7 oder 9!

- $M_3 = \{3, -3\}$

Enthält alle Zahlen mit dem Betrag 3.

- $M_4 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

- $M_5 = \{3, 3^4, 3^7, \dots\}$

Enthält Zahlen 3^n , wobei n durch 3 geteilt den Rest 1 ergibt.

- M_1 : Enthält **nur** das einzelne Element a

- $M_2 = \{8, 10, 9, 11\}$

Wort besteht aus zwei Teilen, die addiert werden:

u ist entweder 1 oder 2, v ist entweder 7 oder 9!

- $M_3 = \{3, -3\}$

Enthält alle Zahlen mit dem Betrag 3.

- $M_4 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

- $M_5 = \{3, 3^4, 3^7, \dots\}$

Enthält Zahlen 3^n , wobei n durch 3 geteilt den Rest 1 ergibt.

- $M_6 = \mathbb{R}$

x^2 ist immer positiv, also macht der Betrag hier keinen Unterschied.

- M_1 : Enthält **nur** das einzelne Element a

- $M_2 = \{8, 10, 9, 11\}$

Wort besteht aus zwei Teilen, die addiert werden:

u ist entweder 1 oder 2, v ist entweder 7 oder 9!

- $M_3 = \{3, -3\}$

Enthält alle Zahlen mit dem Betrag 3.

- $M_4 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

- $M_5 = \{3, 3^4, 3^7, \dots\}$

Enthält Zahlen 3^n , wobei n durch 3 geteilt den Rest 1 ergibt.

- $M_6 = \mathbb{R}$

x^2 ist immer positiv, also macht der Betrag hier keinen Unterschied.

- $M_7 = \{53, 59, 61, 67, \dots\}$

Mengen



Mengenoperationen

Schnitt - $A \cap B$

Gegeben zwei Mengen A und B.
In der Schnittmenge liegt alles, das in
Menge A **und** in Menge B ist.

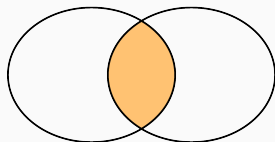


Abbildung 1: Veranschaulichung der Schnittmenge

Vereinigung - $A \cup B$

Gegeben zwei Mengen A und B.

In der Vereinigung liegt alles, das nur in A, nur in B **oder** in beiden Mengen liegt.

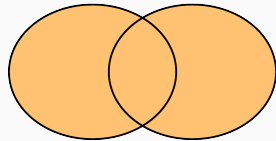


Abbildung 2: Veranschaulichung der Vereinigung

Komplement - $\bar{A}$

Gegeben sei eine Menge A .

Im Komplement der Menge A liegen alle Elemente, die in der Obermenge (z.B. $\mathbb{N}$), aber nicht in der Menge A selbst liegen.

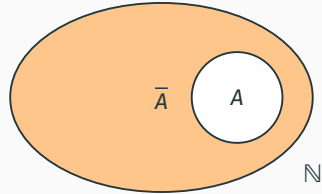


Abbildung 3: Veranschaulichung des Komplements

Komplement - $\bar{A}$

Gegeben sei eine Menge A .

Im Komplement der Menge A liegen alle Elemente, die in der Obermenge (z.B. $\mathbb{N}$), aber nicht in der Menge A selbst liegen.

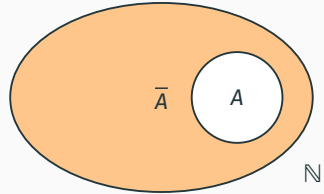


Abbildung 3: Veranschaulichung des Komplements

Anmerkung: Kann auch geschrieben werden als $\mathbb{N} \setminus A$.
(gesprochen $\mathbb{N}$ „ohne“ A)

Berechne folgende Mengen

Normal

- $M_1 = \{1\} \cup \{2\}$
- $M_2 = \{\} \cap \{-1, 0, 1\}$
- $M_3 = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$
- $M_4 = \overline{\{3^n \mid n \text{ ist gerade}\}}$ über $\{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Schwer bis sehr schwer

- $M_5 = \{1, 2, 3\} \cap \{1, \{2, 3\}\}$
- $M_6 = \{u \mid |u| \equiv 0 \pmod{2}, u \in \mathbb{N}\} \cup \{v \mid |v| \equiv 0 \pmod{4}, v \in \mathbb{N}\}$
- $M_7 = \overline{\{a^n \mid n \text{ ist gerade}, a \in \{3, 4\}\}}$ über $\mathbb{N}$

- $M_1 = \{1, 2\}$

- $M_1 = \{1, 2\}$
- $M_2 = \emptyset$

- $M_1 = \{1, 2\}$
- $M_2 = \emptyset$
- $M_3 = \mathbb{Z}$

- $M_1 = \{1, 2\}$
- $M_2 = \emptyset$
- $M_3 = \mathbb{Z}$
- $M_4 = \{3^n \mid n \text{ ist ungerade}\}$

- $M_1 = \{1, 2\}$
- $M_2 = \emptyset$
- $M_3 = \mathbb{Z}$
- $M_4 = \{3^n \mid n \text{ ist ungerade}\}$
- $M_5 = \{1\}$

- $M_1 = \{1, 2\}$
- $M_2 = \emptyset$
- $M_3 = \mathbb{Z}$
- $M_4 = \{3^n \mid n \text{ ist ungerade}\}$
- $M_5 = \{1\}$
- $M_6 = \{u \mid |u| \equiv 0 \pmod{2}, u \in \mathbb{N}\}$

- $M_1 = \{1, 2\}$
- $M_2 = \emptyset$
- $M_3 = \mathbb{Z}$
- $M_4 = \{3^n \mid n \text{ ist ungerade}\}$
- $M_5 = \{1\}$
- $M_6 = \{u \mid |u| \equiv 0 \pmod{2}, u \in \mathbb{N}\}$
- $M_7 = \mathbb{N} \setminus \{9^n, 16^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 $= \mathbb{N} \setminus \{3^{2n}, 4^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Aussagenlogik



Aussagen

- Paris ist die Hauptstadt von Frankreich
- Tim ist kein Mensch
- $5 \in \mathbb{N}$
- $5 = 8$
- $u \in \{u, v, w\}$

Eine Aussage A ist entweder **wahr** oder **falsch**.

Das sind keine Aussagen

- Macht theoretische Informatik Spaß?
- Geh dein Zimmer aufräumen!
- Wie oft muss man Zähne putzen?
- $(x + y)^2 + 1$
- $\{a, b, c\}$
- ...

Diesen Sätzen können wir keinen eindeutigen Wahrheitswert **wahr** oder **falsch** zuordnen.

Wozu brauchen wir das?

- Wir untersuchen, wie wir Aussagen verknüpfen können.
- Damit ziehen wir formale Schlüsse und führen Beweise.

Wir können Aussagen verändern oder durch Operationen zu neuen Aussagen verbinden.

- A : Hamster Paule möchte Nüsse.
- B : Hamster Paule will schlafen.

Grundoperationen

- **Und:** $A \wedge B \leadsto$ Hamster Paule möchte Nüsse **und** will schlafen.
Analog: $M: M_1 \cap M_2$, Jedes Element aus M liegt in M_1 **und** in M_2

Wir können Aussagen verändern oder durch Operationen zu neuen Aussagen verbinden.

- A : Hamster Paule möchte Nüsse.
- B : Hamster Paule will schlafen.

Grundoperationen

- **Und:** $A \wedge B \leadsto$ Hamster Paule möchte Nüsse und will schlafen.
- **Oder:** $A \vee B \leadsto$ Hamster Paule möchte Nüsse **oder** will schlafen.

Anmerkung: Inklusives „oder“, kein „entweder oder“

Das heißt, es können auch beide Aussagen wahr sein.

Analog: $M: M_1 \cup M_2$, Jedes Element aus M liegt in M_1 **oder** in M_2

Wir können Aussagen verändern oder durch Operationen zu neuen Aussagen verbinden.

- A : Hamster Paule möchte Nüsse.
- B : Hamster Paule will schlafen.

Grundoperationen

- **Und:** $A \wedge B \rightsquigarrow$ Hamster Paule möchte Nüsse und will schlafen.
- **Oder:** $A \vee B \rightsquigarrow$ Hamster Paule möchte Nüsse oder will schlafen.
- **Nicht:** $\neg A \rightsquigarrow$ Hamster Paule möchte **keine** Nüsse.

Analog: $M: \overline{M_1}$, Jedes Element aus M liegt **nicht** in M_1

Der Wahrheitswert einer Aussage kann in Abhängigkeit der Teilaussagen in einer Tabelle dargestellt werden:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
0 (falsch)	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1 (wahr)	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Überblick: Mengenoperationen und logische Operatoren

Auf **Mengen** M_1, M_2 lassen sich verschiedene Mengenoperationen ausführen.

Mengenoperationen

Auf **Aussagen** A_1, A_2 lassen sich verschiedene logische Operationen ausführen.

Logische Operationen

Überblick: Mengenoperationen und logische Operatoren

Auf **Mengen** M_1, M_2 lassen sich verschiedene Mengenoperationen ausführen.

Mengenoperationen

- Schnitt: $M_1 \cap M_2$

Auf **Aussagen** A_1, A_2 lassen sich verschiedene logische Operationen ausführen.

Logische Operationen

- Logisches Und: $A_1 \wedge A_2$

Überblick: Mengenoperationen und logische Operatoren

Auf **Mengen** M_1, M_2 lassen sich verschiedene Mengenoperationen ausführen.

Mengenoperationen

- Schnitt: $M_1 \cap M_2$
- Vereinigung: $M_1 \cup M_2$

Auf **Aussagen** A_1, A_2 lassen sich verschiedene logische Operationen ausführen.

Logische Operationen

- Logisches Und: $A_1 \wedge A_2$
- Logisches Oder: $A_1 \vee A_2$

Überblick: Mengenoperationen und logische Operatoren

Auf **Mengen** M_1, M_2 lassen sich verschiedene Mengenoperationen ausführen.

Mengenoperationen

- Schnitt: $M_1 \cap M_2$
- Vereinigung: $M_1 \cup M_2$
- Komplement: $\overline{M_1}$

Auf **Aussagen** A_1, A_2 lassen sich verschiedene logische Operationen ausführen.

Logische Operationen

- Logisches Und: $A_1 \wedge A_2$
- Logisches Oder: $A_1 \vee A_2$
- Logisches Nicht: $\neg A_1$

Überblick: Mengenoperationen und logische Operatoren

Auf **Mengen** M_1, M_2 lassen sich verschiedene Mengenoperationen ausführen.

Mengenoperationen

- Schnitt: $M_1 \cap M_2$
- Vereinigung: $M_1 \cup M_2$
- Komplement: $\overline{M_1}$

Auf **Aussagen** A_1, A_2 lassen sich verschiedene logische Operationen ausführen.

Logische Operationen

- Logisches Und: $A_1 \wedge A_2$
- Logisches Oder: $A_1 \vee A_2$
- Logisches Nicht: $\neg A_1$

ACHTUNG: Eine Mengenoperation kann **nicht** auf Aussagen angewandt werden und logische Operatoren **nicht** auf Mengen.

Mengenoperationen und logische Operationen dürfen nicht verwechselt werden.

$A: 5 \in \mathbb{N}$

$B: \text{Es regnet}$

$C: \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| = 2\}$

$D: \{a, b, c, x, y\}$

Welche dieser Verknüpfungen sind zulässig?

1. $A \wedge B$
2. $A \vee C$
3. $C \cap D$
4. $A \wedge B \cup C$

1. Zulässig

1. Zulässig

2. Nicht zulässig

1. Zulässig
2. Nicht zulässig
3. Zulässig

1. Zulässig
2. Nicht zulässig
3. Zulässig
4. Nicht zulässig

$$A \implies B$$

- „Wenn A wahr ist, dann muss auch B wahr sein.“
- kurz: „**Wenn A , dann B .**“
- Wenn A falsch ist, können wir keine Aussage über B treffen.
- $A \implies B$ ist dieselbe Aussage wie $\neg A \vee B$

$$A \implies B$$

- „Wenn A wahr ist, dann muss auch B wahr sein.“
- kurz: „**Wenn A , dann B .**“
- Wenn A falsch ist, können wir keine Aussage über B treffen.
- $A \implies B$ ist dieselbe Aussage wie $\neg A \vee B$

Kontraposition

- $\neg B \implies \neg A$ ist die Kontraposition zu $A \implies B$
- „Wenn B falsch ist, dann muss A auch falsch (gewesen) sein“
- Die Implikation und ihre Kontraposition haben den selben Wahrheitswert

Aufgaben

Die folgenden Teilaufgaben bestehen aus einer Aussage, einem Geschehen und aus einer Folgerung. Welche der Folgerungen sind richtig, unter der Annahme, dass die Aussagen wahr sind?

Normal bis Schwer

- Aussage: "Wenn Philipp nicht im Vorkurs ist, schläft er noch"
Geschehen: Philipp ist nicht im Vorkurs.
Folgerung: Also schläft er noch.
- Aussage: "Wenn Anne nicht rennt, bekommt sie den Bus nicht"
Geschehen: Anne bekommt den Bus.
Folgerung: Also ist sie gerannt.
- Aussage: "Wenn Tobi auf die Prüfung nicht lernt, besteht er nicht"
Geschehen: Tobi hat auf die Prüfung gelernt.
Folgerung: Also besteht er.

Normal bis Schwer

- Aussage: "Wenn Philipp nicht im Vorkurs, schläft er noch"
Geschehen: Philipp ist nicht im Vorkurs.
Folgerung: Also schläft er noch.

Die Folgerung ist richtig. Laut Aussage ist Philipp im Vorkurs oder schläft noch (oder beides). Wenn er also nicht im Vorkurs ist, bleibt nur noch die Option übrig, dass er noch schläft.

Normal bis Schwer

- Aussage: "Wenn Anne nicht rennt, bekommt sie den Bus nicht"
Geschehen: Anne bekommt den Bus.
Folgerung: Also ist sie gerannt.

Die Folgerung ist richtig. Die zweite Aussage ist die Kontraposition der ersten Aussage. Die Kontraposition einer Aussage ist wahr gdw. die Aussage selbst wahr ist.

Normal bis Schwer

- Aussage: "Wenn Tobi auf die Prüfung nicht lernt, besteht er nicht"
Geschehen: Tobi hat auf die Prüfung gelernt.
Folgerung: Also besteht er.

Die Folgerung ist falsch. Es ist auch möglich, dass Tobi lernt und nicht besteht!

$$A \iff B$$

- „A ist wahr, **genau dann wenn** B wahr ist.“
- kurz: „A gdw. B“
- A und B müssen den selben Wahrheitswert haben.
- $A \iff B$ ist dieselbe Aussage wie $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$

Aufgaben

Berechne den Wahrheitswert folgender Aussagen.

Normal

- $A_1: 5 \in \mathbb{N} \wedge a \in \{a, b, c\}$
- $A_2: 0 \in \mathbb{N} \vee a \in \{a, b, c, d\}$
- $A_3: A_1 \iff A_2$

Etwas Schwerer

- $A_4: (\emptyset \neq \{\}) \implies (a \in \emptyset)$
- $A_5: (a \notin \emptyset) \implies (\emptyset = \{0\})$
- $A_6: A_4 \iff A_5$
- $A_7: (7 \in \{1, 2, 7, 9\}) \cap (2 = 7 - 5)$
- A_8 : Wenn Hamster Paule eine Nuss sieht,
dann frisst Paule diese.

- A_1 : wahr

- A_1 : wahr
- A_2 : wahr

- A_1 : wahr
- A_2 : wahr
- A_3 : wahr

- A_1 : wahr
- A_2 : wahr
- A_3 : wahr
- A_4 : wahr

- A_1 : wahr
- A_2 : wahr
- A_3 : wahr
- A_4 : wahr
- A_5 : falsch

- A_1 : wahr
- A_2 : wahr
- A_3 : wahr
- A_4 : wahr
- A_5 : falsch
- A_6 : falsch

- A_1 : wahr
- A_2 : wahr
- A_3 : wahr
- A_4 : wahr
- A_5 : falsch
- A_6 : falsch
- A_7 : Das ist keine Aussage, da der Schnitt ($\cap$) verwendet wurde um zwei Aussagen miteinander zu verknüpfen

- A_1 : wahr
- A_2 : wahr
- A_3 : wahr
- A_4 : wahr
- A_5 : falsch
- A_6 : falsch
- A_7 : Das ist keine Aussage, da der Schnitt ($\cap$) verwendet wurde um zwei Aussagen miteinander zu verknüpfen
- A_8 : wahr

Wir haben zwei Aussagen A und B . Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass dann auch B wahr ist, wissen wir, dass $A \implies B$ gilt.

Beispiel

1. Wir wollen zeigen, dass für eine ganze Zahl x die Implikation $3 = x - 2 \implies x = 5$ gilt.

Wir haben zwei Aussagen A und B . Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass dann auch B wahr ist, wissen wir, dass $A \implies B$ gilt.

Beispiel

1. Wir wollen zeigen, dass für eine ganze Zahl x die Implikation $3 = x - 2 \implies x = 5$ gilt.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...

Wir haben zwei Aussagen A und B . Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass dann auch B wahr ist, wissen wir, dass $A \implies B$ gilt.

Beispiel

1. Wir wollen zeigen, dass für eine ganze Zahl x die Implikation $3 = x - 2 \implies x = 5$ gilt.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...
3. ...und zeigen, dass dann die rechte Aussage gilt.

Wir haben zwei Aussagen A und B . Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass dann auch B wahr ist, wissen wir, dass $A \implies B$ gilt.

Beispiel

1. Wir wollen zeigen, dass für eine ganze Zahl x die Implikation $3 = x - 2 \implies x = 5$ gilt.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...
3. ...und zeigen, dass dann die rechte Aussage gilt.
4. $(3 = x - 2) \implies (3 + 2 = x) \implies (5 = x) \implies (x = 5)$

Wir haben zwei Aussagen A und B . Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass dann auch B wahr ist, wissen wir, dass $A \implies B$ gilt.

Beispiel

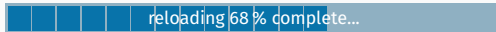
1. Wir wollen zeigen, dass für eine ganze Zahl x die Implikation $3 = x - 2 \implies x = 5$ gilt.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...
3. ...und zeigen, dass dann die rechte Aussage gilt.
4. $(3 = x - 2) \implies (3 + 2 = x) \implies (5 = x) \implies (x = 5)$
5. Also folgt die rechte Aussage aus der linken.

Wir haben zwei Aussagen A und B . Wir nehmen nun an, A sei wahr. Wenn wir zeigen, dass dann auch B wahr ist, wissen wir, dass $A \implies B$ gilt.

Beispiel

1. Wir wollen zeigen, dass für eine ganze Zahl x die Implikation $3 = x - 2 \implies x = 5$ gilt.
2. Wir nehmen an, dass die linke Aussage wahr ist...
3. ...und zeigen, dass dann die rechte Aussage gilt.
4. $(3 = x - 2) \implies (3 + 2 = x) \implies (5 = x) \implies (x = 5)$
5. Also folgt die rechte Aussage aus der linken.
6. Somit gilt die Implikation. □

Quantoren



Oft wollen wir Aussagen nicht nur für ein Element, sondern für viele Elemente treffen.

Beispiel

A_1 : Für die Zahl 5 gilt: Sie hat einen Nachfolger

Allgemeiner:

A_2 : Für jede natürliche Zahl n gilt: n hat einen Nachfolger

Beispiel

A_3 : Für die Zahl 5 gilt: Sie ist eine Primzahl

Allgemeiner:

A_4 : Es gibt eine natürliche Zahl n , so dass gilt: n ist eine Primzahl

Mithilfe von **Quantoren** vereinfachen wir uns die Schreibweise dieser Aussagen.

Quantor $\forall$: Die Aussage gilt für alle Elemente.

Beispiel

$A_1: \forall k \in \mathbb{N} : 2k \text{ ist gerade}$

Quantor $\exists$: Die Aussage gilt für mindestens ein Element.

Beispiel

$A_2: \exists k \in \mathbb{N} : k \text{ ist Primzahl}$

In einer Aussage können mehrere Quantoren vorkommen.
Wir lesen dann von links nach rechts.

Beispiel

$A_1: \forall x, y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} : x + y = z$

Bedeutung: Für zwei beliebige Zahlen x und y aus $\mathbb{N}$ gibt es eine weitere natürliche Zahl z , so dass $x + y = z$ gilt.

Achtung!

Die Reihenfolge von zwei Quantoren zu vertauschen, kann die Bedeutung einer Aussage deutlich verändern.

Beispiel

$x, y \in \text{Menschen}$

$A_1: \forall x \exists y : x \text{ **kennt** } y$

$A_2: \exists x \forall y : x \text{ **kennt** } y$

Was ist der Unterschied zwischen beiden Aussagen?

Aufgabe

Wir formulieren folgende Aussage mithilfe von Quantoren und den Symbolen der Aussagenlogik (Junktoren).

Beispiel

- A_1 : Eine ganze Zahl ist eine natürliche Zahl, wenn sie positiv oder null ist.

Hinführung

- A_1 : Für alle ganzen Zahlen x gilt: Wenn x positiv oder null ist, ist x eine natürliche Zahl.

Lösung

- $A_1: \forall x \in \mathbb{Z} : x \geq 0 \implies x \in \mathbb{N}$

Aufgaben

Formuliere folgende Aussagen mithilfe von Quantoren und den Symbolen der Aussagenlogik (Junktoren).

Normal

- A_1 : Die Differenz zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.

Schwer

- A_2 : Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen.

Da haben selbst wir keinen Bock drauf

- A_3 : Eine natürliche Zahl, die von einer von ihr verschiedenen natürlichen Zahl größer als 1 geteilt wird, ist nicht prim.

- $A_1: \forall x, y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$

- $A_1: \forall x, y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$
- $A_2: \forall x \in \mathbb{N} \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

- $A_1: \forall x, y \in \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$
- $A_2: \forall x \in \mathbb{N} \exists a, b, c, d \in \mathbb{N} : x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
- $A_3: \forall x \in \mathbb{N} : (\exists y \in \mathbb{N} : (y > 1) \wedge (y \neq x) \wedge (y \mid x)) \implies$
 $x \text{ ist keine Primzahl.}$

Oft benötigen wir eine Aussagenlogische Äquivalente Bedingung von Mengenoperationen. Dafür nehmen wir mal die Obermenge $\mathbb{N}$

Operationen

- **Teilmenge:** $A \subseteq B \rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \implies x \in B$

Oft benötigen wir eine Aussagenlogische Äquivalente Bedingung von Mengenoperationen. Dafür nehmen wir mal die Obermenge $\mathbb{N}$

Operationen

- **Teilmenge:** $A \subseteq B \leadsto \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \implies x \in B$
- **Vereinigung:** $A \cup B \leadsto \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$

Oft benötigen wir eine Aussagenlogische Äquivalente Bedingung von Mengenoperationen. Dafür nehmen wir mal die Obermenge $\mathbb{N}$

Operationen

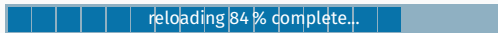
- **Teilmenge:** $A \subseteq B \rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \implies x \in B$
- **Vereinigung:** $A \cup B \rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$
- **Schnitt:** $A \cap B \rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$

Oft benötigen wir eine Aussagenlogische Äquivalente Bedingung von Mengenoperationen. Dafür nehmen wir mal die Obermenge $\mathbb{N}$

Operationen

- **Teilmenge:** $A \subseteq B \leadsto \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \implies x \in B$
- **Vereinigung:** $A \cup B \leadsto \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$
- **Schnitt:** $A \cap B \leadsto \forall x \in \mathbb{N} : x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$
- **Komplement:** $\bar{A} \leadsto \forall x \in \mathbb{N} : x \in \bar{A} \iff x \notin A$

Beweisen



Was ist ein Beweis?

- lückenlose Folge von logischen Schlüssen, welche zur zu beweisenden Behauptung führen
- nicht nur einleuchtend, sondern zweifelsfrei korrekt

Was ist ein Beweis?

- lückenlose Folge von logischen Schlüssen, welche zur zu beweisenden Behauptung führen
- nicht nur einleuchtend, sondern zweifelsfrei korrekt

Warum beweisen?

- Aussage basierend auf Fakten und nicht subjektiv belegen
- Bestätigung von Aussagen für weitere Nutzung
- Zeigen der absoluten Wahrheit

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. zu zeigen: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

2. Umschreiben:

$$\begin{aligned} &\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C)) \\ &\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C) \end{aligned}$$

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$

3. Implikation

linke Seite wahr $\implies$ rechte Seite muss wahr sein.

linke Seite falsch $\implies$ beliebiges kann folgen

$\implies$ uns interessiert also nur der Fall links ist wahr

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$

3. Wir machen uns also "die linke Seite ist wahr" zur Voraussetzung

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$

3. Wir machen uns also "die linke Seite ist wahr" zur Voraussetzung:
Angenommen, $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$ gilt.

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$

3. Ang., $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$.

4. Jetzt geht der Beweis richtig los.

Wähle beliebiges x , um Allgemeinheit zu wahren...

Sei x beliebig

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$.
4. Sei x beliebig mit $x \in A$.

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$.
4. Sei x beliebig mit $x \in A$.
5. Wir können jetzt unsere Voraussetzungen ausnutzen, um $x \in C$ zu folgern.

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$.
4. Sei x beliebig mit $x \in A$.
5. $\implies x \in B$

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$
3. Ang., $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$.
4. Sei x beliebig mit $x \in A$.
5. $\implies x \in B \implies x \in C$

Zu zeigen: Teilmengen sind transitiv.

1. z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

2. $\iff ((\forall x : x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x : x \in B \implies x \in C))$
 $\implies (\forall x : x \in A \implies x \in C)$

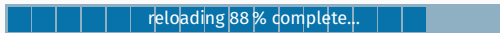
3. Ang., $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$.

4. Sei x beliebig mit $x \in A$.

5. $\implies x \in B \implies x \in C$

□

Wiederholung



Einführung

- Theoretische Informatik ist ganz schön wichtig...
- ...für mein Studium.

Mengen, Elemente, Mengenschreibweise

- Was sind Mengen und Elemente?
- Was ist eine Teilmenge und was eine *echte* Teilmenge?
- Wie schreiben wir Mengen strukturiert und formal auf?

Operationen auf Mengen

- Wie funktionieren Vereinigung, Schnitt und Komplement?
- Wie bilde ich die Vereinigung oder Schnittmenge zweier Mengen?
- Wie bilde ich das Komplement einer Menge?
- Wie kann ich Sprachen formal beschreiben?
- Hantieren mit verschiedenen seltsamen Mengen und den Verknüpfungen

Logik

- Was ist eine Aussage?
- Was bedeuten $\wedge$, $\vee$ und $\neg$?
- Wie funktioniert die Implikation?
- Wie funktioniert die Äquivalenz?

Quantoren

- Wie funktionieren $\forall$ und $\exists$?
- Wie dürfen Quantoren (untereinander) angeordnet werden?
- Wie werden Mengenoperationen mit Quantoren geschrieben?

Grundlagen Beweise

- Was ist ein Beweis?
- Wie können wir bei einem einfachen Beweis vorgehen?
- Was ist die Idee der Kontraposition?
- Was ist die Idee des Widerspruchsbeweis?
- Wann reicht ein Beispiel als Beweis?

Noch Fragen?

Abk.	Bedeutung	Was?!
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen (mit 0)	In der theoretischen Informatik enthält $\mathbb{N}$ die 0: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (Auch $\mathbb{N}_0$)
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \{\text{z.B. } 2, -3, \sqrt{17}, \pi, \text{ usw.}\}$
$\emptyset$	$\{\}$	leere Menge
$a b$	teilt	a ist Teiler von b , d.h. a teilt b ohne Rest
$:$	sodass	z.B. $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a b$

Glossar — Mengenoperationen

Abk.	Bedeutung	Was?!
$A \subseteq B$	Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Dabei können die Mengen auch gleich sein.
$A \subsetneq B$	echte Teilmenge	$A \subseteq B$. Und zusätzlich enthält B Elemente, die nicht in A enthalten sind. $\implies$ Mengen sind nicht gleich!
$A \subset B$	Teilmenge <u>oder</u> echte Teilmenge	Bei manchen Leuten $\subseteq$, bei manchen $\subsetneq$. Mehrdeutig, lieber nicht verwenden!
$A \cap B$	Schnitt	Enthält alle Elemente, die in A <i>und</i> in B enthalten sind
$A \cup B$	Vereinigung	Enthält alle Elemente, die in A , B oder beiden enthalten sind
$A \setminus B$	Komplement, gespr. "A ohne B"	Enthält alle Elemente aus A , die <i>nicht</i> in B enthalten sind
$\overline{B}$	B Komplement	Enthält alle Elemente aus einer geg. Obermenge, die <i>nicht</i> in B enthalten sind

Glossar — Aussagenlogik (Operatoren)

Abk.	Bedeutung	Was?!
$A \wedge B$	<i>A und B</i>	A und B müssen wahr sein, damit die Gesamtaussage wahr ist
$A \vee B$	<i>A oder B</i>	Es müssen mindestens A, B oder beide wahr sein
$\neg A$	<i>nicht A</i>	A muss falsch sein, damit $\neg A$ wahr ist
$B \implies A$	A ist notwendig für B	A muss wahr sein, wenn B wahr ist
$A \implies B$	A ist hinreichend für / impliziert B	B muss wahr sein, wenn A wahr ist
$A \iff B$	notwendig und hinreichend	genau dann, wenn

Glossar — Aussagenlogik (Sprachlich)

Abk.	Bedeutung	Was?!
$A \text{ gdw. } B$	genau dann, wenn	Äquivalenz zwischen Aussagen
A ist notwendig für B	$B \implies A$	A muss wahr sein, wenn B wahr ist
A ist hinreichend für B	$A \implies B$	B muss wahr sein, wenn A wahr ist
notwendig und hinreichend	$A \iff B$	genau dann, wenn

Glossar — Quantoren

Abk.	Bedeutung	Was?!
$\forall x \in M : A(x)$	Für alle x aus M gilt $A(x)$	Die Aussage A muss für alle Elemente der Menge M wahr sein
$\exists x \in M : A(x)$	Es existiert ein x in M für das $A(x)$ gilt	Die Aussage $A(x)$ muss für mind. 1 (oder mehr) Elemente wahr sein
$\forall x, y \in M : A(x, y)$	Für alle x und alle y gilt $A(x, y)$	Äquivalent zu $\forall x \forall y : A(x, y)$

- Unsere Folien sind frei!
- Jeder darf die Folien unter den Bedingungen der **GNU General Public License v3** (oder jeder späteren Version) weiterverwenden.
- Ihr findet den Quelltext unter
<https://www.github.com/FIUS/theo-vorkurs-folien>

