

Vorkurs Theoretische Informatik

Induktion und Einführung in die Grammatik

Arbeitskreis Theo-Vorkurs

Mittwoch, 9. Oktober 2024

Fachgruppe Informatik Universität Stuttgart



1. Vollständige Induktion

Idee

Funktionsweise

Formalere Definition

2. Grammatiken

Produktionsregeln

formale Notation

Ableiten

3. Wiederholung



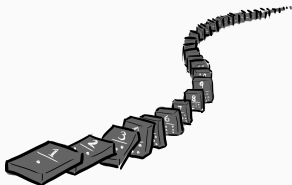
Vollständige Induktion



Zeige Aussagen der Form:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
5. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
6. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
7. ...



Zeige Aussagen der Form:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...

1. Induktionsanfang

Zeige Aussage für das kleinste Element

2. Induktionsvoraussetzung

Zeige, unter der Voraussetzung:
die Aussage gelte für beliebiges n, \dots

3. Induktionsschritt

...dann gilt die Aussage auch für dessen Nachfolger $n + 1$.

4. \leadsto Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.



$$\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Zeigen Sie $\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang (IA)

Zeige Aussage gilt für $n := 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^0 (2i+1) &\stackrel{!}{=} (0+1)^2 \\ \iff 2 \cdot 0 + 1 &\stackrel{!}{=} 1^2 \\ \iff 1 &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$



Zeigen Sie $\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang (IA)

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^0 (2i + 1) = (0 + 1)^2.$

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. Aussage gilt für (ein beliebiges aber festes) $n \in \mathbb{N}.$

Induktionsschritt (IS)

Zeige Aussage gilt für alle $n + 1$ unter Nutzung der (IV):

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) \stackrel{!}{=} ((n + 1) + 1)^2$$



Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle $n + 1$ unter Nutzung der IV:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) && \stackrel{!}{=} && ((n + 1) + 1)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^n (2i + 1) + \sum_{i=n+1}^{n+1} (2i + 1) && \stackrel{!}{=} && (n + 2)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^n (2i + 1) + (2(n + 1) + 1) && \stackrel{!}{=} && n^2 + 2 \cdot 2n + 2^2 \\ \stackrel{IV}{\Leftrightarrow} & (n + 1)^2 + (2(n + 1) + 1) && \stackrel{!}{=} && n^2 + 4n + 4 \\ \Leftrightarrow & n^2 + 2n + 1^2 + 2n + 2 + 1 && \stackrel{!}{=} && n^2 + 4n + 4 \\ \Leftrightarrow & n^2 + 4n + 4 && = && n^2 + 4n + 4 \end{aligned}$$



Zeigen Sie $\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang (IA)

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^0 (2i + 1) = 1^2.$

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. Aussage gilt für (ein beliebiges aber festes) $n \in \mathbb{N}.$

Induktionsschritt (IS)

Aussage gilt für alle $n + 1$ unter Nutzung der IV, da

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) = ((n + 1) + 1)^2$$

→ Aussage gilt für alle $n.$



Aufgaben

Versuche dich an den folgenden Induktionsbeweisen.

Normal

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schwerer

$$\prod_{i=1}^n 4^i = 2^{n(n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$



Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff \underbrace{(P(n_0))}_{\text{IA}} \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (P(n) \implies P(n+1))}^{\text{IS}}$$

1. **IA:** $n = n_0$
2. **IS:** Sei $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ beliebig. Ang. es gilt $P(n)$. (iv)
3. Zeigen, dass $P(n+1)$ gilt, unter Verwendung von $P(n)$ (iv)



Die folgende Induktion zeigt eine seltsame Aussage.

Ist der Beweis korrekt geführt? Was ist passiert?

Sei $A(n) :=$ *In einem Wald aus n Bäumen haben alle die selbe Größe.*

Zu zeigen: $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsanfang (IA)

$A(1)$: Aussage gilt für $n := 1$, da ein Baum nur eine Größe haben kann.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. $A(n)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

Induktionsschritt (IS)

Zeige Aussage gilt für alle $n + 1$ unter Nutzung der IV:

D.h. wir zeigen $A(n + 1) =$ *In einem Wald aus $n + 1$ Bäumen haben alle die selbe Größe.*



Induktionsschritt (IS)

Wir betrachten einen Wald aus $n + 1$ Bäumen:



Wir sondern einen Baum aus und betrachten den Rest. Nach I.V. haben diese alle die selbe Größe.



Jetzt sondern wir einen anderen Baum aus.



Die übrigen n Bäume haben nach I.V. wieder die selbe Größe.



Also haben alle $n + 1$ Bäume die selbe Größe. $\leadsto A(n)$ gilt für alle n .



Grammatiken



Wir können inzwischen Sprachen in Mengenschreibweise darstellen.

Es gibt aber auch weitere Möglichkeiten Sprachen zu definieren.

Wir können Regeln formulieren mit denen wir alle Wörter einer Sprache schrittweise erzeugen können.



Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$

Hier ist z.B. $ww^R = ababbbabab \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S .
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \rightarrow aSa \text{ oder } S \rightarrow bSb$$

$$\text{oder } S \rightarrow aa \text{ oder } S \rightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben:
z.B.: $ababbbabab \rightsquigarrow$
4. Wir nennen diese Umformungsregeln Produktionsregeln.

w^R ist w rückwärts



Einschränkungen

- *Nichtterminale* werden meist durch Großbuchstaben repräsentiert und müssen durch Produktionsregeln abgeändert werden.
- *Terminale* werden meist durch Kleinbuchstaben repräsentiert und sollten *nicht* durch weitere Produktionsregeln abgeändert werden.
- Mehrere Symbole können auf einen Schlag überführt werden. Dabei sollten die Terminale nicht entfernt oder umsortiert werden.
z.B. $AB \rightarrow CD$ ist erlaubt.
Auch $abAB \rightarrow BbAa$, aber das gehört sich nicht.



Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$$L_1 = \{a\}^*$$

$$P = \{S \rightarrow aS \mid \varepsilon\}$$

$$L_2 = \{a, b\}^*$$

$$P = \{S \rightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon\}$$

$$L_3 = \{a^n b b c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$P = \{S \rightarrow ABC,$$

$$A \rightarrow aA \mid \varepsilon,$$

$$B \rightarrow bb,$$

$$C \rightarrow cC \mid \varepsilon\}$$



Aufgaben

Findet Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

Normal

- $L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = \{uv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{c, d\}^*\}$
- $L_4 = \{w \mid |w| = 3, w \in \{a, b, c\}^*\}$

Etwas Schwerer

- $L_5 = \{a^n \mid n \equiv 1 \pmod{3}\}$
- $L_6 = \{w \mid |w|_a = 3, |w|_b = 1, w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $L_7 = \{uv \mid u \in \{\blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}^*, v \in \{\text{STOP}\}\}$
- $L_8 = \{w \mid |w| = 2, w \in \{a, b\}^*\}$



Wir beschreiben eine *Grammatik* durch ein geordnetes *Tupel* $G = (V, \Sigma, P, S)$

- V ist die Menge der verwendeten Nichtterminale
- Σ die Menge der Terminale bzw. unser Alphabet
- P ist die Menge der Produktionsregeln
- S ist die Startvariable

Beispiel für $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n \geq 1\}$

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$P = \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow aa, S \rightarrow bb\}$

bzw. kurz: $P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$



Knifflige Aufgabe

Totoro will durch das Labyrinth laufen.

Er hat folgende Möglichkeiten:

$$\Sigma = \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow, \downarrow\}$$

- Totoro kann nicht auf ein Feld zurücktreten, von dem er gerade kam
- Totoro geht bei jedem Schritt ein Feld in die angegebene Richtung

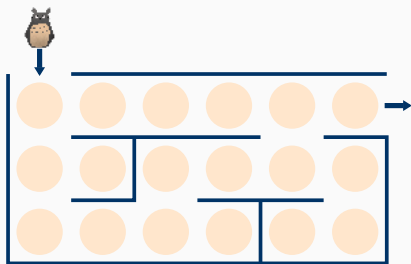


Abbildung 2: Totoros Problem

Gib eine Grammatik an, welche die Sprache beschreibt, die Totoro durch alle ihm möglichen Wege des Labyrinths führt.



Beispiel

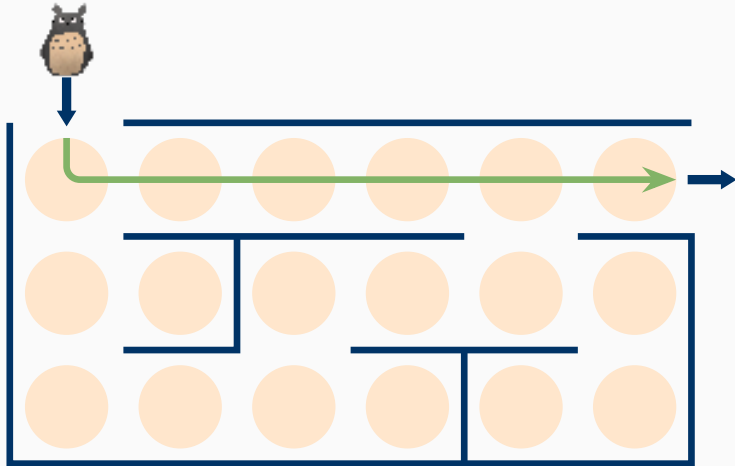


Abbildung 3: Der direkte Weg ist repräsentiert durch das Wort ▼▶▶▶▶▶▶▶



Wir können durch das Ableiten formal zeigen, dass ein Wort von einer Grammatik erzeugt wird:

Wir betrachten $L = \{ww^R \mid w^R \text{ ist } w \text{ rückwärts, } w \in \{a, b\}^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

mit der Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

$V = \{S\}, \Sigma = \{a, b\}, P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$

Beispiel

Wir zeigen $ww^R = ababbbbaba \in L$.

$S \Rightarrow_G aSa \Rightarrow_G abSba \Rightarrow_G abaSaba \Rightarrow_G ababSbaba$

$\Rightarrow_G ababbbbaba$

□



Aufgaben

Zeige die folgenden Aussagen

Normal

- $G_1 = (\{S\}, \{a\}, P_1, S)$ erzeugt $aaaa$
mit $P_1 = \{S \rightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$ erzeugt $aabbc$
mit $P_2 = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \rightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $G_3 = (\{S, U, V\}, \{a, b, c, d\}, P_3, S)$ erzeugt $abac$
mit $P_3 = \{S \rightarrow UV, U \rightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \rightarrow c \mid d\}$
- $G_4 = (\{S, X\}, \{a, b, c\}, P_4, S)$ erzeugt aac
mit $P_4 = \{S \rightarrow XXX, X \rightarrow a \mid b \mid c\}$



Aufgaben

Zeige die folgenden Aussagen

Etwas Schwerer

- $G_5 = (\{S\}, \{a\}, P_5, S)$ erzeugt $aaaa$
mit $P_5 = \{S \rightarrow a \mid aaaS\}$
- $G_6 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P_6, S)$ erzeugt $cabcacca$
mit $P_6 = \{S \rightarrow AAAB, AB \rightarrow BA, A \rightarrow cA \mid Ac \mid a, B \rightarrow cB \mid Bc \mid b\}$
- $G_7 = (\{S, U\}, \{\text{STOP}, \blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}, P_7, S)$ erzeugt $\blacktriangleright \text{STOP}$
mit $P_7 = \{S \rightarrow U \text{STOP} \mid \text{STOP}, U \rightarrow \blacktriangleleft U \mid \blacktriangle U \mid \blacktriangleright U \mid \blacktriangledown U \mid \varepsilon\}$



Wiederholung



Vollständige Induktion

- Was ist die Idee der Induktion?
- Welche Schritte hat die Induktion?
- Für welche Aussagen ist die Induktion geeignet?



Grammatiken

- Was sind Grammatiken?
- Was ist der Zusammenhang zwischen Grammatiken und Sprachen?
- Was sind Nichtterminale?
- Was sind Terminale?
- Bilden einer Grammatik für gegebene Sprache
- Wie finde ich raus, ob ein Wort von einer Grammatik erzeugt wird?



Abk.	Bedeutung	Was?!
$A \subseteq B$	Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Dabei können die Mengen auch gleich sein.
$A \subsetneq B$	echte Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Jedoch enthält B noch Elemente, die nicht in A enthalten sind. \implies Mengen sind nicht gleich!
$A \subset B$	Teilmenge <i>oder</i> echte Teilmenge	Bei manchen Leuten \subseteq , bei manchen \subsetneq . Mehrdeutig, lieber nicht verwenden!



- Unsere Folien sind frei!
- Jeder darf die Folien unter den Bedingungen der **GNU General Public License v3** (oder jeder späteren Version) weiterverwenden.
- Ihr findet den Quelltext unter
<https://www.github.com/FIUS/theo-vorkurs-folien>

