# Vorkurs Theoretische Informatik

## Einführung in reguläre Sprachen

Arbeitskreis Theo Vorkurs

Freitag, 15.10.2021

Fachgruppe Informatik

# Übersicht

# Automaten: Weitere Beispiele

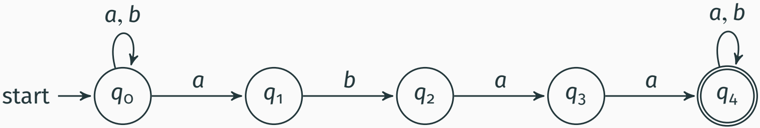
# Beispiel NEA vs DEA

$L = \{uabaav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$

# Beispiel NEA vs DEA

$L = \{uabaav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$

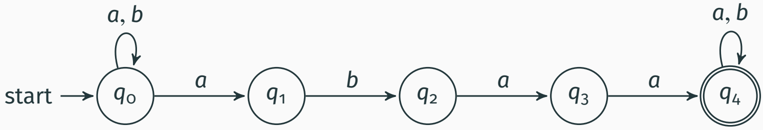
**NEA:**



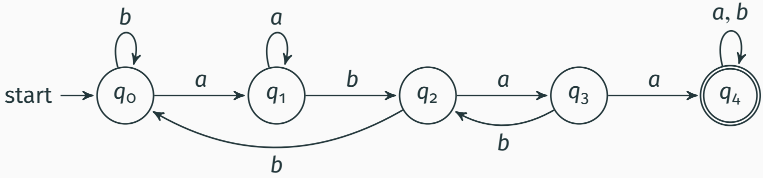
# Beispiel NEA vs DEA

$L = \{uabaav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$

**NEA:**




**DEA:**



# Denkpause

## Aufgaben

### Normal

Finde einen passenden DEA oder NEA für die folgenden Sprachen:

- $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \equiv 1 \pmod 3\}$
- $L_2 = \{ua \mid u \in \{a, b\}^*\}$

### Etwas Schwerer

Finde einen passenden NEA mit einem Startzustand für die folgende Sprache

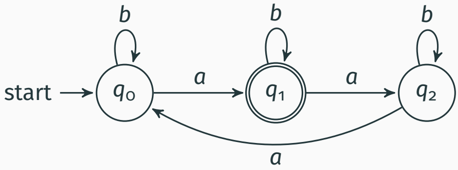
- $L_3 = L_1 \cup L_2$

### Sehr Schwer

Finde für $L_3$ einen passenden DEA

# Lösung: Normal

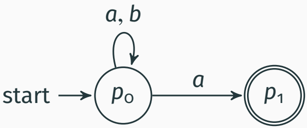
$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \equiv 1 \pmod 3\}$



# Lösung: Normal

$L_2 = \{ua \mid u \in \{a,b\}^*\}$

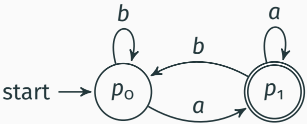
NEA:



# Lösung: Normal

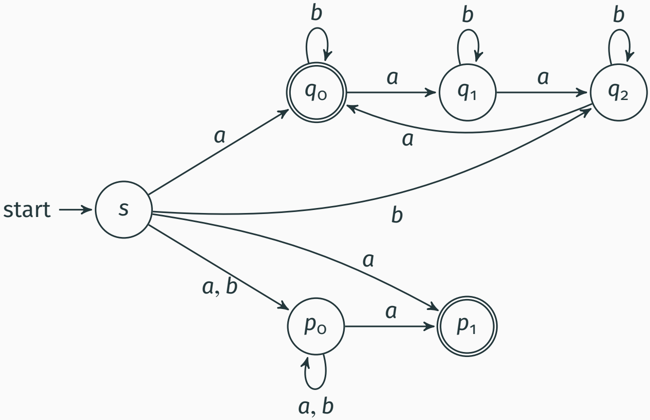
$L_2 = \{ua \mid u \in \{a, b\}^*\}$

DEA:



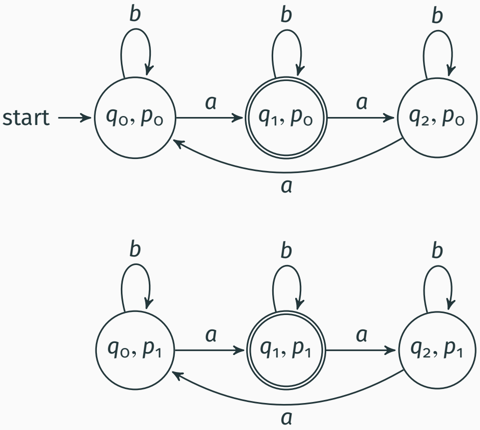
# Lösung: Etwas Schwieriger

$L_3 = L_1 \cup L_2$



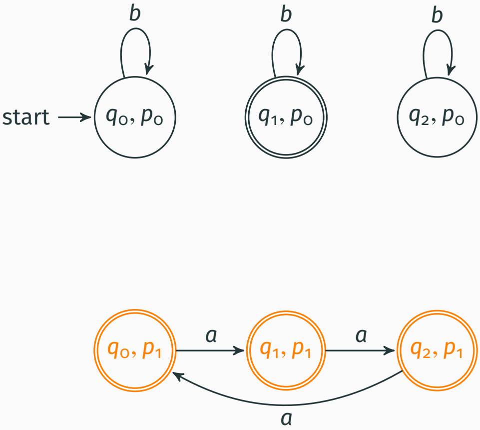
# Lösung: Schwer

$L_3 = L_1 \cup L_2$

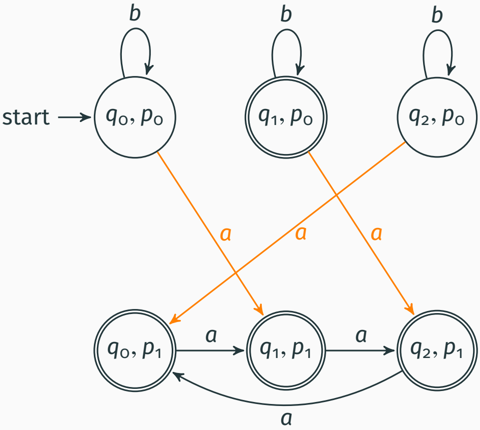


## Lösung: Schwer

$L_3 = L_1 \cup L_2$

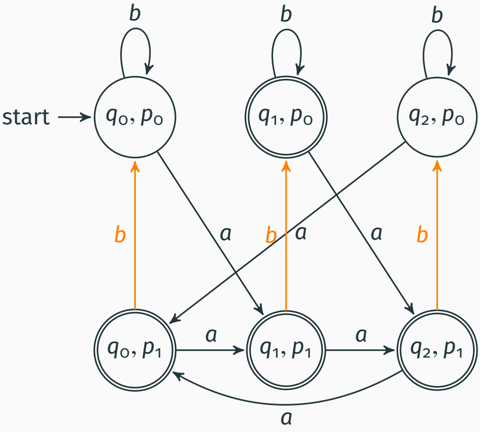


$L_3 = L_1 \cup L_2$



# Lösung: Schwer

$L_3 = L_1 \cup L_2$



# Grammatik und Automaten

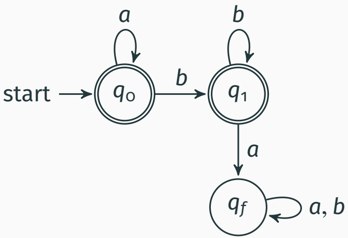
# Automaten: Formal

Ein **DEA M** lässt sich beschreiben durch ein geordnetes 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit:

- $Z$: Die Menge der Zustände
- $\Sigma$: Das Alphabet
- $\delta$: Die Überführungsfunktion
- $z_0$: Der Startzustand
- $E$: Die Menge der Endzustände

# Automaten: Formal - Beispiel

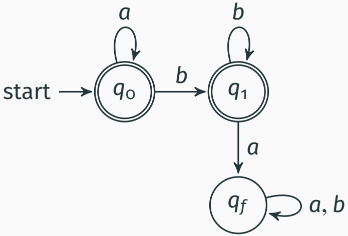
$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$




$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

# Automaten: Formal - Beispiel

$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

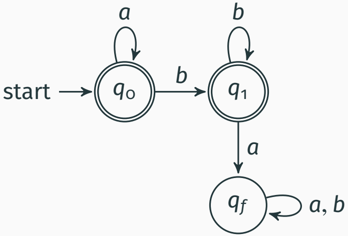



$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

- $Z = \{q_0, q_1, q_f\}$

# Automaten: Formal - Beispiel

$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

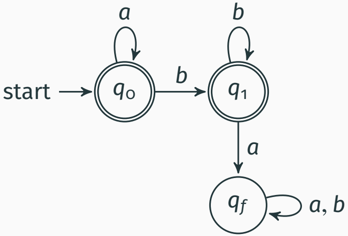



$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

- $Z = \{q_0, q_1, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$

# Automaten: Formal - Beispiel

$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

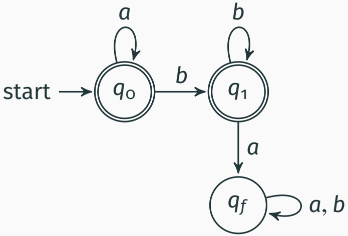



$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

- $Z = \{q_0, q_1, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta$:
  - $\delta(q_0, a) = q_0$
  - $\delta(q_0, b) = q_1$
  - $\delta(q_1, a) = q_f$
  - $\delta(q_1, b) = q_1$
  - $\delta(q_f, a) = q_f$
  - $\delta(q_f, b) = q_f$

# Automaten: Formal - Beispiel

$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$



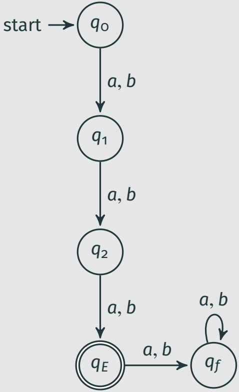

$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

- $Z = \{q_0, q_1, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta$:
  - $\delta(q_0, a) = q_0$
  - $\delta(q_0, b) = q_1$
  - $\delta(q_1, a) = q_f$
  - $\delta(q_1, b) = q_1$
  - $\delta(q_f, a) = q_f$
  - $\delta(q_f, b) = q_f$
- $E = \{q_0, q_1\}$

## Aufgabe

### Normal

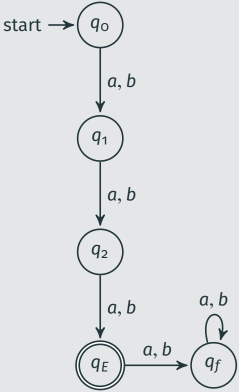
$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 3\}$



## Aufgabe

### Normal

$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 3\}$




## Lösung

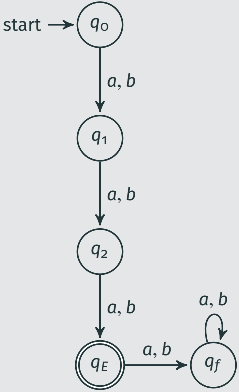
$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

# Automaten: Formal - Aufgabe

## Aufgabe

### Normal

$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 3\}$




## Lösung

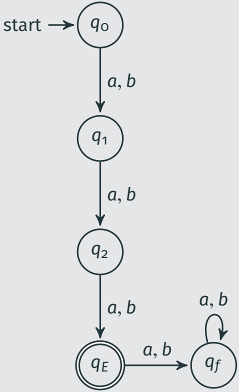
$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

- $Z = \{q_0, q_1, q_2, q_E, q_f\}$

## Aufgabe

### Normal

$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 3\}$




## Lösung

$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

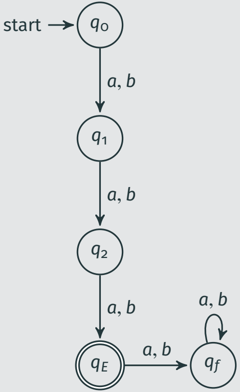
- $Z = \{q_0, q_1, q_2, q_E, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$

# Automaten: Formal - Aufgabe

## Aufgabe

### Normal

$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 3\}$




## Lösung

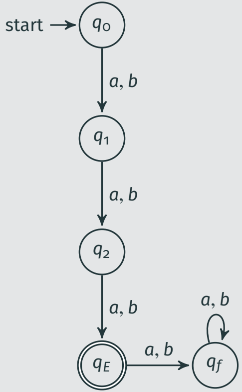
$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

- $Z = \{q_0, q_1, q_2, q_E, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta$:
  - $\delta(q_0, a) = q_1$
  - $\delta(q_0, b) = q_1$
  - $\delta(q_1, a) = q_2$
  - $\delta(q_1, b) = q_2$
  - $\delta(q_2, a) = q_3$
  - $\delta(q_2, b) = q_3$
  - $\delta(q_E, a) = q_f$
  - $\delta(q_E, b) = q_f$
  - $\delta(q_f, a) = q_f$
  - $\delta(q_f, b) = q_f$

### Aufgabe

**Normal**

$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 3\}$




### Lösung

$M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit:

- $Z = \{q_0, q_1, q_2, q_E, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta$:
  - $\delta(q_0, a) = q_1$
  - $\delta(q_0, b) = q_1$
  - $\delta(q_1, a) = q_2$
  - $\delta(q_1, b) = q_2$
  - $\delta(q_2, a) = q_3$
  - $\delta(q_2, b) = q_3$
  - $\delta(q_E, a) = q_f$
  - $\delta(q_E, b) = q_f$
  - $\delta(q_f, a) = q_f$
  - $\delta(q_f, b) = q_f$
- $E = \{q_E\}$

# Automaten und Grammatiken: Parallelen

Wir stellen einige Parallelen fest:

| **DEA** | **Reguläre Grammatiken** |
|---|---|

# Automaten und Grammatiken: Parallelen

Wir stellen einige Parallelen fest:

| **DEA** | **Reguläre Grammatiken** |
|---|---|
| Wörter werden von links nach rechts gelesen | Wörter werden von links nach rechts erzeugt |

# Automaten und Grammatiken: Parallelen

Wir stellen einige Parallelen fest:

| **DEA** | **Reguläre Grammatiken** |
|---|---|
| Wörter werden von links nach rechts gelesen | Wörter werden von links nach rechts erzeugt |
| Pro Schritt wird ein Buchstabe gelesen | Pro Schritt wird ein Buchstabe erzeugt |

# Automaten und Grammatiken: Parallelen

Wir stellen einige Parallelen fest:

| **DEA** | **Reguläre Grammatiken** |
|---|---|
| Wörter werden von links nach rechts gelesen | Wörter werden von links nach rechts erzeugt |
| Pro Schritt wird ein Buchstabe gelesen | Pro Schritt wird ein Buchstabe erzeugt |
| Ein Startzustand | Ein Startsymbol |

# Automaten und Grammatiken: Parallelen

Wir stellen einige Parallelen fest:

| **DEA** | **Reguläre Grammatiken** |
|---|---|
| Wörter werden von links nach rechts gelesen | Wörter werden von links nach rechts erzeugt |
| Pro Schritt wird ein Buchstabe gelesen | Pro Schritt wird ein Buchstabe erzeugt |
| Ein Startzustand | Ein Startsymbol |
| Wenn beim Lesen des letzten Buchstabens wird in einen Endzustand übergegangen wird, wird akzeptiert | Beim Erzeugen des letzten Buchstabens wird keine neue Variable erzeugt |

# Automaten und Grammatiken: Parallelen

Wir stellen einige Parallelen fest:

| **DEA** | **Reguläre Grammatiken** |
|---|---|
| Wörter werden von links nach rechts gelesen | Wörter werden von links nach rechts erzeugt |
| Pro Schritt wird ein Buchstabe gelesen | Pro Schritt wird ein Buchstabe erzeugt |
| Ein Startzustand | Ein Startsymbol |
| Wenn beim Lesen des letzten Buchstabens wird in einen Endzustand übergegangen wird, wird akzeptiert | Beim Erzeugen des letzten Buchstabens wird keine neue Variable erzeugt |
| In jedem Schritt wird aus einem Zustand in genau einen Zustand übergegangen | In jedem Schritt wird aus einer Variable genau eine Variable erzeugt |

**Satz**

Jede durch deterministische endliche Automaten erkennbare Sprache ist auch regulär (also Typ 3).

Der Beweis dieses Satzes findet sich im Anhang.

Ihr werdet ihn auch in der Vorlesung zeigen.

# Verdauungspause

# Reguläre Ausdrücke

# mehr Möglichkeiten reguläre Sprachen zu beschreiben

Automaten und Mengenschreibweise sind oft nicht das optimale Mittel, eine Sprache zu beschreiben.
Die regulären Ausdrücke bieten uns eine Möglichkeit Sprachen schnell und intuitiv zu beschreiben.

## Funktionsweise

1. Wörter können mit einem angegebenen Muster abgeglichen werden.
2. Lässt sich ein Wort durch das Muster beschreiben, ist es in der davon beschriebenen Sprache.

# Reguläre Ausdrücke verwenden

## Induktive Definition der Syntax

- $\emptyset$ und $\varepsilon$ sind reguläre Ausdrücke.
- $a$ ist ein regulärer Ausdruck (für alle $a \in \Sigma$).
- Wenn $\alpha$ und $\beta$ reguläre Ausdrücke sind,
  dann sind $\alpha\beta$, $(\alpha \mid \beta)$ und $(\alpha)^*$ auch reguläre Ausdrücke.

## Beispiele für die Syntax

Reguläre Ausdrücke können zum Beispiel so aussehen...

- $\gamma_1 = (a|b)baa(ab)^*$
- $\gamma_2 = ((\varepsilon|baa(b|bb))aa)^*$

# Bedeutung von Regulären Ausdrücken

**Reguläre Ausdrücke und Sprachen**

Ein regulärer Ausdruck $\gamma$ beschreibt eine formale Sprache.

Diese formale Sprache schreiben wir als $L(\gamma) \subseteq \Sigma^*$.

Wir bauen reguläre Ausdrücke schrittweise auf und erklären dabei die Bedeutung der einzelnen Bausteine:

**Bedeutung von regulären Ausdrücken**

- Sei $\gamma = \emptyset$: Dann ist $L(\gamma) = \emptyset$

# Bedeutung von Regulären Ausdrücken

**Reguläre Ausdrücke und Sprachen**

Ein regulärer Ausdruck $\gamma$ beschreibt eine formale Sprache.

Diese formale Sprache schreiben wir als $L(\gamma) \subseteq \Sigma^*$.

Wir bauen reguläre Ausdrücke schrittweise auf und erklären dabei die Bedeutung der einzelnen Bausteine:

**Bedeutung von regulären Ausdrücken**

- Sei $\gamma = \emptyset$: Dann ist $L(\gamma) = \emptyset$
- Sei $\gamma = \varepsilon$: Dann ist $L(\gamma) = \{\varepsilon\}$

# Bedeutung von Regulären Ausdrücken

## Reguläre Ausdrücke und Sprachen

Ein regulärer Ausdruck $\gamma$ beschreibt eine formale Sprache.

Diese formale Sprache schreiben wir als $L(\gamma) \subseteq \Sigma^*$.

Wir bauen reguläre Ausdrücke schrittweise auf und erklären dabei die Bedeutung der einzelnen Bausteine:

## Bedeutung von regulären Ausdrücken

- Sei $\gamma = \emptyset$: Dann ist $L(\gamma) = \emptyset$
- Sei $\gamma = \varepsilon$: Dann ist $L(\gamma) = \{\varepsilon\}$
- Sei $\gamma = a$ für ein $a \in \Sigma$: Dann ist $L(\gamma) = \{a\}$

# Bedeutung von regulären Ausdrücken

**Bedeutung von regulären Ausdrücken**

Sind $\alpha$ und $\beta$ bereits reguläre Ausdrücke, so gilt:

- Sei $\gamma = (\alpha \mid \beta)$: Dann ist $L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta)$

**Beispiel:** $\gamma = (\alpha \mid \beta)$

- $L(a|b) = \{a, b\}$
- $L((aab|baba)|a) = \{aab, baba, a\}$

# Bedeutung von regulären Ausdrücken

## Bedeutung von regulären Ausdrücken

Sind $\alpha$ und $\beta$ bereits reguläre Ausdrücke, so gilt:

- Sei $\gamma = (\alpha \mid \beta)$: Dann ist $L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- Sei $\gamma = (\alpha)^*$: Dann ist $L(\gamma) = L(\alpha)^*$

## Beispiel: $\gamma = (\alpha)^*$

- $L((a)^*) = \{a\}^* = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L((abaa)^*) = \{abaa\}^* = \{w^n \mid n \in \mathbb{N}, w = abaa\}$
- $L((a|b)^*) = (L(a|b))^* = \{a, b\}^*$
- $L((a)^*|(b)^*) = L((a)^*) \cup L((b)^*) = \{a\}^* \cup \{b\}^*$

## Bedeutung von regulären Ausdrücken

Sind $\alpha$ und $\beta$ bereits reguläre Ausdrücke, so gilt:

- Sei $\gamma = (\alpha \mid \beta)$: Dann ist $L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- Sei $\gamma = (\alpha)^*$: Dann ist $L(\gamma) = L(\alpha)^*$
- Sei $\gamma = \alpha\beta$: Dann ist $L(\gamma) = \{uv \mid u \in L(\alpha) \land v \in L(\beta)\}$

**Beispiel:** $\gamma = \alpha\beta$

- $L(ababba) = \{ababba\}$
- $L((a)^*(b)^*) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L((bab \mid (ab)^*)abb) = \{bababb\} \cup \{(ab)^n abb \mid n \in \mathbb{N}\}$

# Reguläre Ausdrücke

## Aufgaben

Finde einen regulären Ausdruck $\gamma_i$ für die folgenden Sprachen.

### Normal

- $L(\gamma_1) = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L(\gamma_2) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L(\gamma_3) = \{uv \mid u \in \{a, b\}^*,\ v \in \{c, d\}\}$
- $L(\gamma_4) = \{w \mid |w| = 3, w \in \{a, b, c\}^*\}$

### Etwas Schwerer

- $L(\gamma_5) = \{a^n \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$
- $L(\gamma_6) = \{uv \mid u \in \{◀, ▲, ▶, ▼\}^*,\ v \in \{🛑\}\}$
- $L(\gamma_7) = \{w \mid |w|_a = 3, |w|_b = 1, w \in \{a, b, c\}^*\}$

# Lösung

Alle Lösungen sind Beispiellösungen - abweichende Lösungen sind möglich. Klammern, die nicht zur Bedeutung beitragen, dürfen wir für die Kurzschreibweise weglassen.

- $\gamma_1 = (aa)^*$

# Lösung

Alle Lösungen sind Beispiellösungen - abweichende Lösungen sind möglich. Klammern, die nicht zur Bedeutung beitragen, dürfen wir für die Kurzschreibweise weglassen.

- $\gamma_1 = (aa)^*$
- $\gamma_2 = a^* b^*$

# Lösung

Alle Lösungen sind Beispiellösungen - abweichende Lösungen sind möglich. Klammern, die nicht zur Bedeutung beitragen, dürfen wir für die Kurzschreibweise weglassen.

- $\gamma_1 = (aa)^*$
- $\gamma_2 = a^*b^*$
- $\gamma_3 = (a|b)^*\ (c|d)$

# Lösung

Alle Lösungen sind Beispiellösungen - abweichende Lösungen sind möglich. Klammern, die nicht zur Bedeutung beitragen, dürfen wir für die Kurzschreibweise weglassen.

- $\gamma_1 = (aa)^*$
- $\gamma_2 = a^* b^*$
- $\gamma_3 = (a|b)^* \ (c|d)$
- $\gamma_4 = (a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)$

# Lösung

Alle Lösungen sind Beispiellösungen - abweichende Lösungen sind möglich. Klammern, die nicht zur Bedeutung beitragen, dürfen wir für die Kurzschreibweise weglassen.

- $\gamma_1 = (aa)^*$
- $\gamma_2 = a^* b^*$
- $\gamma_3 = (a|b)^* \ (c|d)$
- $\gamma_4 = (a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)$
- $\gamma_5 = a(aaa)^*$

# Lösung

Alle Lösungen sind Beispiellösungen - abweichende Lösungen sind möglich. Klammern, die nicht zur Bedeutung beitragen, dürfen wir für die Kurzschreibweise weglassen.

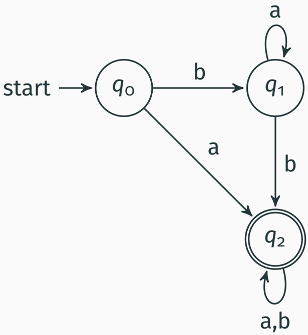
- $\gamma_1 = (aa)^*$
- $\gamma_2 = a^* b^*$
- $\gamma_3 = (a|b)^* \ (c|d)$
- $\gamma_4 = (a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)$
- $\gamma_5 = a(aaa)^*$
- $\gamma_6 = (\blacktriangleleft | \blacktriangle | \blacktriangleright | \blacktriangledown)^*$ STOP

# Lösung

Alle Lösungen sind Beispiellösungen - abweichende Lösungen sind möglich. Klammern, die nicht zur Bedeutung beitragen, dürfen wir für die Kurzschreibweise weglassen.

- $\gamma_1 = (aa)^*$
- $\gamma_2 = a^*b^*$
- $\gamma_3 = (a|b)^*\ (c|d)$
- $\gamma_4 = (a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)$
- $\gamma_5 = a(aaa)^*$
- $\gamma_6 = (\blacktriangleleft|\ \blacktriangle|\ \blacktriangleright|\ \blacktriangledown)^*$🛑
- $\gamma_7 = c^*(ac^*ac^*ac^*b \mid ac^*ac^*bc^*a \mid ac^*bc^*ac^*a \mid bc^*ac^*ac^*a)c^*$

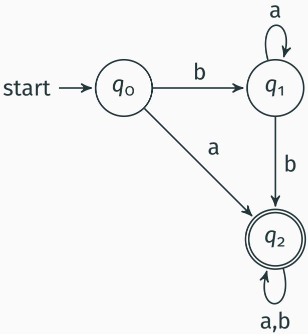
**Gegeben sei folgender DEA M:**




**Welcher reguläre Ausdruck beschreibt $T(M)$?**

1. $(a|b(a)^*b)(a|b)^*$
2. $a(ab)^*$
3. $(a|b(a)^*b)(b)^*$
4. $(a|b)^*$

**Gegeben sei folgender DEA M:**




**Welcher reguläre Ausdruck beschreibt $T(M)$?**

1. $(a|b(a)^*b)(a|b)^*$
2. $a(ab)^*$
3. $(a|b(a)^*b)(b)^*$
4. $(a|b)^*$

## Aufgaben

Welche der folgenden Aussagen sind wahr/falsch? Begründe.

### Normal

- $A_1 : \; L\left((a|a)^*\right) = L\left((aa)^*\right)$
- $A_2 : \; L\left((a|b)^*\right) = L\left((a)^* \mid (b)^*\right)$
- $A_3 : \; L\left(\left(a\,(a|b)^*\right) \mid \left(b\,(a|b)^*\right)\right) = \{a, b\}^*$

### Schwer

- $A_4 : \; L\left((\varepsilon|aaa)^*\, a\left(\left((aaa)^* \mid (\varepsilon)^* \,|aaa\right)\right)\right) = \{a^n \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$

### Sehr Schwer

- $A_5 : \; L\left((a|b)^*\right) = L\left(\left((a)^*\, b\right)^* (a)^*\right)$

# Lösung

- $A_1$: falsch

# Lösung

- $A_1$: falsch
- $A_2$: falsch

# Lösung

- $A_1$: falsch
- $A_2$: falsch
- $A_3$: falsch

# Lösung

- $A_1$: falsch
- $A_2$: falsch
- $A_3$: falsch
- $A_4$: wahr

# Lösung

- $A_1$: falsch
- $A_2$: falsch
- $A_3$: falsch
- $A_4$: wahr
- $A_5$: wahr

# Murmelpause

# Wiederholung

# Das können wir jetzt beantworten

**Tag 1: Mengen**

- Was ist eine Menge?
- Wie kann man zwei Mengen verknüpfen?
- Wie schreibt man formal Mengen auf?

# Das können wir jetzt beantworten

**Tag 1: Formale Sprachen**

- Was ist eine Formale Sprache?
- Was ist ein Alphabet?
- Wie zeigt man, dass zwei Sprachen äquivalent sind?

**Aufgaben**
Beantworte die folgenden Fragen

**Normal**

- Was ist der Unterschied zwischen $\Sigma$ und $\Sigma^*$?
- Welche besondere Eigenschaft besitzt das leere Wort $\varepsilon$? Insbesondere: Welchen Wert besitzt $|\varepsilon|$?
- Welchen Wert besitzt $|\varepsilon \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot bab|_a$?

# Lösungen

**Normal**

Was ist der Unterschied zwischen $\Sigma$ und $\Sigma^*$?

i) Das Alphabet $\Sigma$ ist eine nichtleere Menge einstelliger Symbole.

ii) $\Sigma^*$ ist die Menge aller möglichen Kombinationen (bzgl. der Konkatenation) der Elemente aus $\Sigma$.
Insbesondere gilt hier $\varepsilon \in \Sigma^*$.

# Lösungen

**Normal**

Welche besondere Eigenschaft besitzt das leere Wort $\varepsilon$? Insbesondere: Welchen Wert besitzt $|\varepsilon|$?

$\varepsilon$ ist das neutrale Element bzgl. der Konkatenation. Das heißt:

$$\forall w \in \Sigma^* : w = w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w$$

Insbesondere gilt also:

$$\forall w \in \Sigma^* : |w| = |w \cdot \varepsilon| = |w| + |\varepsilon|$$

womit $|\varepsilon| = 0$ gelten muss.

# Lösungen

**Normal**

Welchen Wert besitzt $|\varepsilon \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot bab|_a$?

Zunächst schreiben wir

$$\varepsilon \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot bab = a^2bab = aabab$$

und zählen anschließend die vorkommenden $a$'s. Also

$$|\varepsilon \cdot a^2 \cdot \varepsilon \cdot bab|_a = |aabab|_a = 3.$$

# Aufgaben zu Mengen

## Aufgaben

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

### Normal bis etwas Schwerer

- $a \in \{a, b, c\}$
- $a \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}, c\}$
- $\{\{a, b\}\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}, c\}$

Nenne jeweils 5 Wörter aus den folgenden Sprachen

### Normal bis etwas Schwerer

- $L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = L_2 \setminus L_1$
- $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \equiv 3 \pmod 4\}$

# Lösungen

**Normal**

$$a \in \{a, b, c\}$$

- wahr

# Lösungen

**Normal**

$$a \subseteq \{a, b, c\}$$

- wahr
- geht nicht

# Lösungen

**Normal**

$$\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}, c\}$$

- wahr
- geht nicht
- wahr

# Lösungen

**Normal**

$$\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}, c\}$$

- wahr
- geht nicht
- wahr
- wahr

# Lösungen

**Normal**

$$\{\{a, b\}\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}, c\}$$

- wahr
- geht nicht
- wahr
- wahr
- wahr

# Lösungen

**Normal**

$$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

- $\varepsilon, a, b, aa, ab, aaa, aab, abb, bbb, \ldots$

## Normal

$$L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- $\varepsilon, a, b, aa, ab, aaa, aab, abb, bbb, \ldots$
- $\varepsilon, ab, aabb, a^3b^3, a^4b^4, \ldots$

# Lösungen

**Normal**

$$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_3 = L_2 \setminus L_1$$

- $\varepsilon, a, b, aa, ab, aaa, aab, abb, bbb, \dots$
- $\varepsilon, ab, aabb, a^3b^3, a^4b^4, \dots$
- Keine Wörter; $\emptyset$

# Lösungen

**Normal**

$$L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \equiv 3 \pmod 4\}$$

- $\varepsilon, a, b, aa, ab, aaa, aab, abb, bbb, \ldots$
- $\varepsilon, ab, aabb, a^3b^3, a^4b^4, \ldots$
- Keine Wörter; $\emptyset$
- $aaa, baaa, abaa, aaba, aaab, a^7, \ldots$

**Aufgaben**
Bestimme den Wahrheitswert der folgenden Aussagen

### Normal

- $\neg(42 = 11) \land (|\varepsilon| > 0 \lor \emptyset^* = \{\varepsilon\})$
- $\forall w \in \{a, b\}^* : (|w|_a = 0 \implies w = \varepsilon)$
- $\forall w \in \{a, b\}^* : (|w|_a = 0 \implies ab = ba)$
- $(\forall w \in \{a, b\}^* : |w|_a = 0) \implies ab = ba$

### Schwer

- $\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 2 \lor x \equiv 1 \pmod 4$

# Lösungen

**Normal**

$$\neg(42 = 11) \wedge (|\varepsilon| > 0 \vee \emptyset^* = \{\varepsilon\})$$

- richtig

# Lösungen

## Normal

$$\forall w \in \{a, b\}^* : (|w|_a = 0 \implies w = \varepsilon)$$

- richtig
- falsch

# Lösungen

**Normal**

$$\forall w \in \{a, b\}^* : (|w|_a = 0 \implies ab = ba)$$

- richtig
- falsch
- falsch

# Lösungen

**Normal**

$$(\forall w \in \{a, b\}^* : |w|_a = 0) \implies ab = ba$$

- richtig
- falsch
- falsch
- richtig

**Schwer**

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 2 \lor x \equiv 1 \pmod 4$$

Die Aussage ist falsch!
Gegenbeispiel $x = 3$, dann ist $x \equiv 1 \pmod 2$ und $x \equiv 3 \pmod 4$.

# Das können wir jetzt beantworten

**Tag 2: Beweise**

- Was ist ein direkter Beweis?
- Wie funktioniert die Kontraposition?
- Wie funktioniert ein Widerspruchsbeweis?

### Aufgaben

Versuche dich an folgenden Beweisen:

#### Normal

Sei $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt:

$$\forall w \in \{a, b\}^* : (w \in L \implies |w| \text{ ist gerade})$$

#### Wer noch nicht genug hat...

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 2 \lor x^2 \equiv 1 \pmod 4$$

# Lösungen

**Aufgabe**

z.Z.: Sei $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt:

$\forall w \in \{a, b\}^* : (w \in L \implies |w| \text{ ist gerade})$

**Beweis**

1. Sei $w \in \{a, b\}^*$ beliebig.

# Lösungen

**Aufgabe**
z.Z.: Sei $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt:

$\forall w \in \{a,b\}^* : (w \in L \implies |w| \text{ ist gerade})$

**Beweis**

1. Sei $w \in \{a,b\}^*$ beliebig.
2. Angenommen, $w \in L$.

**Aufgabe**
z.Z.: Sei $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt:
$\forall w \in \{a, b\}^* : (w \in L \implies |w| \text{ ist gerade})$

**Beweis**

1. Sei $w \in \{a, b\}^*$ beliebig.
2. Angenommen, $w \in L$.
3. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $w = a^n b^n$.

# Lösungen

**Aufgabe**

z.Z.: Sei $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt:

$\forall w \in \{a, b\}^* : (w \in L \implies |w| \text{ ist gerade})$

**Beweis**

1. Sei $w \in \{a, b\}^*$ beliebig.
2. Angenommen, $w \in L$.
3. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $w = a^n b^n$.
4. Insbesondere gilt:

$$|w| = |a^n b^n| = |a^n| + |b^n| = n + n = 2n$$

**Aufgabe**

z.Z.: Sei $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt:

$\forall w \in \{a, b\}^* : (w \in L \implies |w| \text{ ist gerade})$

**Beweis**

1. Sei $w \in \{a, b\}^*$ beliebig.
2. Angenommen, $w \in L$.
3. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $w = a^n b^n$.
4. Insbesondere gilt:

$$|w| = |a^n b^n| = |a^n| + |b^n| = n + n = 2n$$

5. Folglich ist $|w|$ gerade. $\square$

# Lösungen

**Aufgabe**

z.Z.: $\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 2 \lor x^2 \equiv 1 \pmod 4$

**Beweis**

1. Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig.

# Lösungen

**Aufgabe**
z.Z.: $\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 2 \lor x^2 \equiv 1 \pmod 4$

**Beweis**

1. Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. i) (Fall gerade) Sei $x \equiv 0 \pmod 2$: Dann sind wir schon fertig.

**Aufgabe**
z.Z.: $\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 2 \lor x^2 \equiv 1 \pmod 4$

**Beweis**

1. Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. i) (Fall gerade) Sei $x \equiv 0 \pmod 2$: Dann sind wir schon fertig.
   ii) (Fall ungerade) Sei $x \equiv 1 \pmod 2$: Dann können wir $x$ schreiben als $x = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt:

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

Also folgt unmittelbar laut Definition $x^2 \equiv 4(k^2 + k) + 1 \equiv 1 \pmod 4$.

# Lösungen

**Aufgabe**
z.Z.: $\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 2 \vee x^2 \equiv 1 \pmod 4$

**Beweis**

1. Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig.
2. i) (Fall gerade) Sei $x \equiv 0 \pmod 2$: Dann sind wir schon fertig.
   ii) (Fall ungerade) Sei $x \equiv 1 \pmod 2$: Dann können wir $x$ schreiben als $x = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt:
   $$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$
   Also folgt unmittelbar laut Definition $x^2 \equiv 4(k^2 + k) + 1 \equiv 1 \pmod 4$.
3. Somit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

# Das können wir jetzt beantworten

**Tag 3: Grammatiken**

- Was sind Grammatiken?
- Was ist der Zusammenhang zwischen Grammatiken und Sprachen?
- Wie finde ich raus, ob ein Wort von einer Grammatik erzeugt wird?

# Das können wir jetzt beantworten

**Tag 4: Reguläre Grammatiken**

- Wie sehen Produktionsregeln für reguläre Grammatiken aus?
- Bilden einer regulären Grammatik für gegebene reguläre Sprache

# Das können wir jetzt beantworten

**Tag 4: Automaten**

- Was sind Automaten?
- Was macht einen deterministischen Automaten aus?
- Finden eines (deterministischen) Automaten für gegebene Sprache

## Aufgaben

Gegeben sind formale Sprachen. Finde dafür:

- eine reguläre Grammatik
- einen Automaten (NEA oder DEA)
- einen regulären Ausdruck

### Normal

- $L_1 = \{aa, bb\}$ über dem Alphabet $\Sigma_1 = \{a, b\}$

### Etwas Schwerer

- $L_2 = \{(ab)^n x \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{c, d\}\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$

*Hinweis:* Achte auf formal korrekte Notation.

# Lösungen

$L_1 = \{aa, bb\}$ über $\Sigma_1 = \{a, b\}$

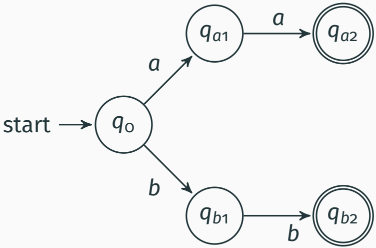
# Lösungen

$L_1 = \{aa, bb\}$ über $\Sigma_1 = \{a, b\}$

- Grammatik: $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S)$ mit $V_1 = \{S, A, B\}$, $P_1 = \{S \longrightarrow aA|bB, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b\}$

$L_1 = \{aa, bb\}$ über $\Sigma_1 = \{a, b\}$

- Grammatik: $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S)$ mit $V_1 = \{S, A, B\}$,
  $P_1 = \{S \longrightarrow aA | bB, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b\}$
- Automat: $M_1 = (\{q_0, q_{a1}, q_{a2}, q_{b1}, q_{b2}\}, \Sigma_1, \delta_1, q_0, \{q_{a2}, q_{b2}\})$



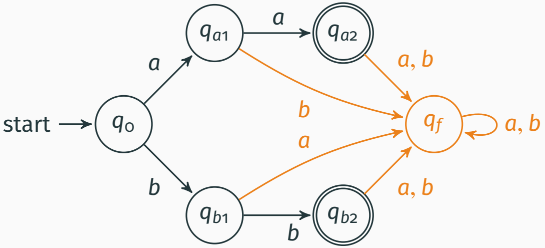

$\delta_1$:

- $\delta_1(q_0, a) = q_{a1}$
- $\delta_1(q_{a1}, a) = q_{a2}$
- $\delta_1(q_0, b) = q_{b1}$
- $\delta_1(q_{b1}, b) = q_{b2}$

# Lösungen

$L_1 = \{aa, bb\}$ über $\Sigma_1 = \{a, b\}$

- Grammatik: $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S)$ mit $V_1 = \{S, A, B\}$,
  $P_1 = \{S \longrightarrow aA|bB, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b\}$
- Automat: $M_1 = \left(\left\{q_0, q_{a1}, q_{a2}, q_{b1}, q_{b2}, q_f\right\}, \Sigma_1, \delta_1, q_0, \{q_{a2}, q_{b2}\}\right)$



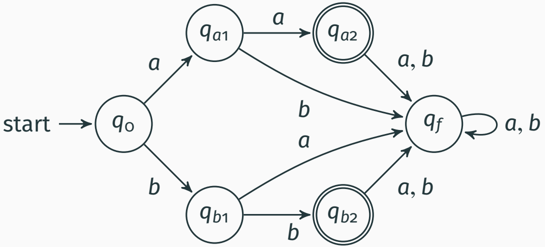

$\delta_1$:

- $\delta_1(q_0, a) = q_{a1}$
- $\delta_1(q_{a1}, a) = q_{a2}$
- $\delta_1(q_0, b) = q_{b1}$
- $\delta_1(q_{b1}, b) = q_{b2}$
- ...

# Lösungen

$L_1 = \{aa, bb\}$ über $\Sigma_1 = \{a, b\}$

- Grammatik: $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S)$ mit $V_1 = \{S, A, B\}$,
  $P_1 = \{S \longrightarrow aA|bB, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b\}$
- Automat: $M_1 = \left(\left\{q_0, q_{a1}, q_{a2}, q_{b1}, q_{b2}, q_f\right\}, \Sigma_1, \delta_1, q_0, \{q_{a2}, q_{b2}\}\right)$




$\delta_1$:

- $\delta_1(q_0, a) = q_{a1}$
- $\delta_1(q_{a1}, a) = q_{a2}$
- $\delta_1(q_0, b) = q_{b1}$
- $\delta_1(q_{b1}, b) = q_{b2}$
- ...

- Regulärer Ausdruck: $\gamma_1 = (aa|bb)$

# Lösungen

$L_2 = \{(ab)^n x \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{c, d\}\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$

# Lösungen

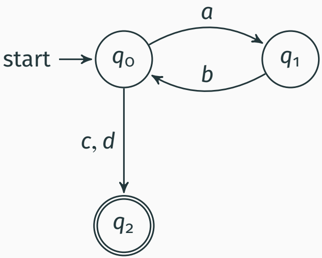
$L_2 = \{(ab)^n x \mid n \in \mathbb{N} \wedge x \in \{c, d\}\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$

- Grammatik: $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S)$ mit $V_2 = \{S, A\}$,
  $P_2 = \{S \longrightarrow aA|c|d, A \longrightarrow bS\}$

# Lösungen

$L_2 = \{(ab)^n x \mid n \in \mathbb{N} \land x \in \{c, d\}\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$

- Grammatik: $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S)$ mit $V_2 = \{S, A\}$, $P_2 = \{S \longrightarrow aA|c|d, A \longrightarrow bS\}$
- Automat: $M_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma_2, \delta_2, q_0, \{q_2\})$



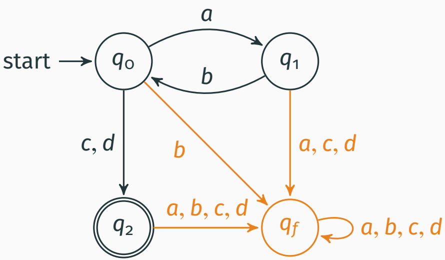

$\delta_2$:

- $\delta_2(q_0, a) = q_1$
- $\delta_2(q_0, c) = q_2$
- $\delta_2(q_0, d) = q_2$
- $\delta_2(q_1, b) = q_1$

# Lösungen

$L_2 = \{(ab)^n x \mid n \in \mathbb{N} \wedge x \in \{c, d\}\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$

- Grammatik: $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S)$ mit $V_2 = \{S, A\}$,
  $P_2 = \{S \longrightarrow aA|c|d, A \longrightarrow bS\}$
- Automat: $M_2 = \left(\left\{q_0, q_1, q_2, q_f\right\}, \Sigma_2, \delta_2, q_0, \{q_2\}\right)$



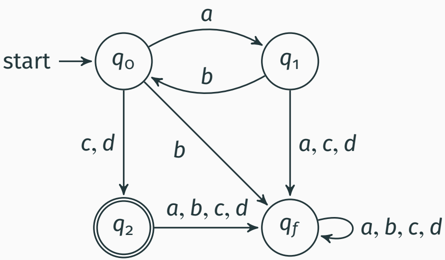

$\delta_2$:

- $\delta_2(q_0, a) = q_1$
- $\delta_2(q_0, c) = q_2$
- $\delta_2(q_0, d) = q_2$
- $\delta_2(q_1, b) = q_1$
- ...

# Lösungen

$L_2 = \{(ab)^n x \mid n \in \mathbb{N} \wedge x \in \{c, d\}\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$

- Grammatik: $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S)$ mit $V_2 = \{S, A\}$,
  $P_2 = \{S \longrightarrow aA|c|d, A \longrightarrow bS\}$
- Automat: $M_2 = \left(\left\{q_0, q_1, q_2, q_f\right\}, \Sigma_2, \delta_2, q_0, \{q_2\}\right)$




$\delta_2$:

- $\delta_2(q_0, a) = q_1$
- $\delta_2(q_0, c) = q_2$
- $\delta_2(q_0, d) = q_2$
- $\delta_2(q_1, b) = q_1$
- ...

- Regulärer Ausdruck: $\gamma_2 = (ab)^*(c|d)$

# Das können wir jetzt beantworten

**Heute: Repräsentationen regulärer Sprachen**

- Welche Möglichkeiten gibt es, reguläre Sprachen zu beschreiben?
- Wie wandelt man Automaten zu einer äquivalenten Grammatik um?
- Was ist ein regulärer Ausdruck?

# Das können wir jetzt beantworten

**Heute: Reguläre Ausdrücke**

- Wie funktioniert die Konkatenation?
- Was bedeuten $(\alpha \mid \beta)$ und $(\alpha)^*$?
- Finden eines regulären Ausdrucks für gegebene reguläre Sprache

# Noch Fragen?

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
| --- | --- | --- |
| $\mathbb{N}$ | natürliche Zahlen (mit 0) | In der theoretischen Informatik enthält $\mathbb{N}$ die 0: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (Auch $\mathbb{N}_0$) |
| $\mathbb{Z}$ | ganze Zahlen | $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots\}$ |
| $\mathbb{Q}$ | rationale Zahlen | können als Bruch dargestellt werden |
| $\Sigma$ | Sigma | mit diesem Zeichen wird oft das Alphabet (die Menge an verwendbaren Symbolen) repräsentiert |
| $\Sigma^*$ | Sigma Stern | Menge aller Möglichkeiten Elemente aus $\Sigma$ hintereinander zu schreiben |
| $\emptyset$ | {} | leere Menge |
| $a\|b$ | teilt | $a$ ist Teiler von $b$, d.h. $a$ teilt $b$ ohne Rest |
| : | sodass | z.B. $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a\|b$ |
| mod | modulo | $a \equiv b \pmod{n} \iff n\|(a-b)$, mit $a, b, n \in \mathbb{Z}$ |

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
|---|---|---|
| z.z. | zu zeigen | Was zu beweisen ist |
| Sei | | bereits bekannte Objekte werden eingeführt und benannt |
| $\exists$ | es gibt ein | |
| $\exists!$ | es gibt genau ein | |
| x ist genau y | x = y | *genau* wird verwendet bei Äquivalenz |
| x ist eindeutig | $\exists! x$ | |
| der, die, das | | bestimmte Artikel weisen auf Eindeutigkeit hin |
| gdw. | genau dann wenn | Äquivalenz zwischen Aussagen |

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
| --- | --- | --- |
| A ist notwendig für B | $B \Longrightarrow A$ | A muss wahr sein,<br>wenn B wahr ist |
| A ist hinreichend für B | $A \Longrightarrow B$ | B muss wahr sein,<br>wenn A wahr ist |
| notwendig und hinreichend | $A \Longleftrightarrow B$ | genau dann wenn |

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
|---|---|---|
| Œ | ohne Einschränkung | die Allgemeinheit der Aussage wird nicht durch getroffene Aussagen eingeschränkt |
| o.B.d.A. | ohne Beschränkung der Allgemeinheit | wie Œ |
| trivial | offensichtlich | Beweisschritte, welche keine weiter Begründung brauchen. (nicht verwenden!) |
| $\square$ | Mic Drop | Kommt am Ende eines erfolgreichen Beweises |
| q.e.d | quod erat demonstrandum | Was zu beweisen war |

# Cheatsheet

| Gestalt | mögliches Vorgehen |
|---|---|
| nicht F | Zeige, dass F nicht gilt. |
| F und G | Zeige F und G in zwei getrennten Beweisen. |
| F $\implies$ G | Füge F in die Menge der Annahmen hinzu und zeige G. |
| F oder G | Zeige: nicht F $\implies$ G. |
| | (Alternativ zeige: nicht G $\implies$ F.) |
| F $\iff$ G | Zeige: F $\implies$ G und G $\implies$ F. |
| $\forall x \in A : F$ | Sei x ein beliebiges Element aus A. Zeige dann F. |
| $\exists x \in A : F$ | Sei x ein konkretes Element aus A. Zeige dann F. |

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
|---|---|---|
| $A \subseteq B$ | Teilmenge | Alle Elemente aus $A$ sind auch in $B$ enthalten. Dabei können die Mengen auch gleich sein. |
| $A \subsetneq B$ | echte Teilmenge | Alle Elemente aus $A$ sind auch in $B$ enthalten. Jedoch enthält $B$ noch Elemente, die nicht in $A$ enthalten sind. $\implies$ Mengen sind nicht gleich! |
| $A \subset B$ | Teilmenge *oder* echte Teilmenge | Bei manchen Leuten $\subseteq$, bei manchen $\subsetneq$. Mehrdeutig, lieber nicht verwenden! |

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
|---|---|---|
| start $\rightarrow q_0$ | Startzustand | Hier fängt der Automat beim Lesen eines Wortes an |
| $q_i \xrightarrow{a} q_j$ | Zustandsübergang | gibt an, welches Symbol eingelesen werden kann, um in den Folgezustand zu übergehen. |
| $q_E$ | Endzustand | Hier kann ein fertig gelesenes Wort akzeptiert werden. |
| $q_f$ $x \in \Sigma$ | Fangzustand | wird benötigt, um Determinismus zu gewährleisten. In Graphiken oft nicht eingezeichnet, ist aber da. Malt den hin. |

# Glossar

| Abk. | Bedeutung | Was?! |
|---|---|---|
| $T(M)$ | Sprache von Automat $M$ | Die Sprache, die von einem Automat $M$ erkannt wird |
| $L(G)$ | Sprache von Grammatik $G$ | Die Sprache, die von einer Grammatik $G$ erzeugt wird |
| $\gamma$ | kleines Gamma | oft Bezeichner für regulären Ausdruck |
| $L(\gamma)$ | Sprache von reg. Ausdruck $\gamma$ | Die Sprache. die von einem regulären Ausdruck $\gamma$ erkannt wird |

# Anhang

# Beweis: DEA zu Grammatik

# Automaten und Grammatiken

**Satz**

Jede durch endliche Automaten erkennbare Sprache ist auch regulär (also Typ 3).

# Automaten und Grammatiken

**Satz**

Jede durch endliche Automaten erkennbare Sprache ist auch regulär (also Typ 3).

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und M ein Automat mit $\mathtt{T}(\mathtt{M}) = \mathtt{A}$.

# Automaten und Grammatiken

**Satz**

Jede durch endliche Automaten erkennbare Sprache ist auch regulär (also Typ 3).

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und M ein Automat mit $\mathbf{T(M) = A}$.
(d.h. $M$ erkennt die Sprache $A$)

**Satz**

Jede durch endliche Automaten erkennbare Sprache ist auch regulär (also Typ 3).

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und M ein Automat mit $\mathbf{T(M) = A}$.
(d.h. $M$ erkennt die Sprache $A$)

Wir suchen eine Typ 3-Grammatik G mit $\mathbf{L(G) = A}$.

# Automaten und Grammatiken

**Satz**

Jede durch endliche Automaten erkennbare Sprache ist auch regulär (also Typ 3).

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und M ein Automat mit $\mathbf{T(M) = A}$.
(d.h. $M$ erkennt die Sprache $A$)

Wir suchen eine Typ 3-Grammatik G mit $\mathbf{L(G) = A}$.
(d.h. die Grammatik $G$ erzeugt die Sprache $A$)

# Automaten und Grammatiken

**Satz**

Jede durch deterministische endliche Automaten erkennbare Sprache ist auch regulär (also Typ 3).

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und M ein DEA mit $\mathbf{T(M) = A}$.
(d.h. $M$ erkennt die Sprache $A$)

Wir suchen eine Typ 3-Grammatik G mit $\mathbf{L(G) = A}$.
(d.h. die Grammatik $G$ erzeugt die Sprache $A$)

**Anmerkung**

Wir beschränken uns auf DEAs; in der Vorlesung werdet ihr aber eine allgemeinere Äquivalenz zeigen.

# DEA zu Grammatik: Konstruktion

Also: Zustände $\hat{=}$ Variablen; Übergänge $\hat{=}$ Produktionen

# DEA zu Grammatik: Konstruktion

Also: Zustände $\hat{=}$ Variablen; Übergänge $\hat{=}$ Produktionen

Sei also ein DEA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ gegeben.
Wir definieren die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit:

# DEA zu Grammatik: Konstruktion

Also: Zustände $\hat{=}$ Variablen; Übergänge $\hat{=}$ Produktionen

Sei also ein DEA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ gegeben.
Wir definieren die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit:

- Alphabet $\Sigma$

# DEA zu Grammatik: Konstruktion

Also: Zustände $\hat{=}$ Variablen; Übergänge $\hat{=}$ Produktionen

Sei also ein DEA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ gegeben.
Wir definieren die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit:

- Alphabet $\Sigma$
- Variablenmenge $V = Z$

# DEA zu Grammatik: Konstruktion

Also: Zustände $\hat{=}$ Variablen; Übergänge $\hat{=}$ Produktionen

Sei also ein DEA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ gegeben.
Wir definieren die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit:

- Alphabet $\Sigma$
- Variablenmenge $V = Z$
- Startsymbol $S = z_0$

# DEA zu Grammatik: Konstruktion

Also: Zustände $\widehat{=}$ Variablen; Übergänge $\widehat{=}$ Produktionen

Sei also ein DEA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ gegeben.
Wir definieren die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit:

- Alphabet $\Sigma$
- Variablenmenge $V = Z$
- Startsymbol $S = z_0$
- Produktionsmenge $P$ erzeugen wir aus $\delta$

# DEA zu Grammatik: Produktionsregeln

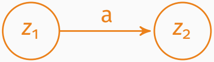
Für die Produktionsmenge $P$ wandeln wir die Übergänge um.

# DEA zu Grammatik: Produktionsregeln

Für die Produktionsmenge $P$ wandeln wir die Übergänge um.

Jedem $\delta$-Übergang $\delta(z_1, a) = z_2$ ordnen wir folgende Regeln zu:

- $z_1 \longrightarrow az_2$




„$\delta(z_1, a) = z_2$“
wird zu

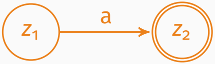
$$z_1 \longrightarrow az_2$$

# DEA zu Grammatik: Produktionsregeln

Für die Produktionsmenge $P$ wandeln wir die Übergänge um.

Jedem $\delta$-Übergang $\delta(z_1, a) = z_2$ ordnen wir folgende Regeln zu:

- $z_1 \longrightarrow az_2$
- Und zusätzlich, falls $z_2 \in E$ :
  $z_1 \longrightarrow a$




„$\delta(z_1, a) = z_2$“
wird zu

$z_1 \longrightarrow az_2$

$z_1 \longrightarrow a$

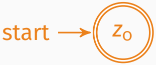
# DEA zu Grammatik: Produktionsregeln

Für die Produktionsmenge $P$ wandeln wir die Übergänge um.

Jedem $\delta$-Übergang $\delta(z_1, a) = z_2$ ordnen wir folgende Regeln zu:

- $z_1 \longrightarrow az_2$
- Und zusätzlich, falls $z_2 \in E$ :
  $z_1 \longrightarrow a$

Falls $z_0 \in E$, brauchen wir außerdem $z_0 \longrightarrow \varepsilon$.




„$z_0 \in E$“
wird zu

$z_0 \longrightarrow \varepsilon$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

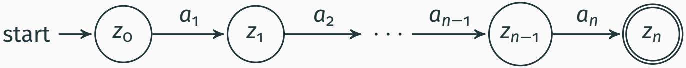
**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

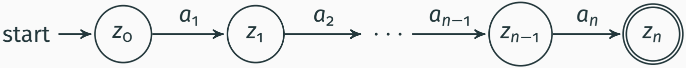
Sei $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.



# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.



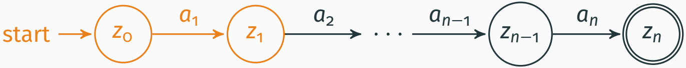

Mit den passenden Regeln lässt sich $x$ ableiten:

$$z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow a_1 a_2 z_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = x$$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.



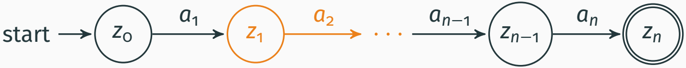

Mit den passenden Regeln (z.B. $z_0 \longrightarrow a_1 z_1$) lässt sich $x$ ableiten:

$$z_0 \Longrightarrow a_1 z_1 \Longrightarrow a_1 a_2 z_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} z_{n-1} \Longrightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = x$$

## DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.



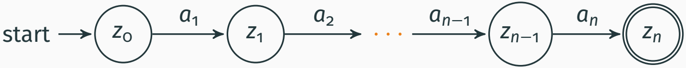

Mit den passenden Regeln (z.B. $z_1 \longrightarrow a_2 z_2$) lässt sich $x$ ableiten:

$$z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow a_1 a_2 z_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = x$$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.



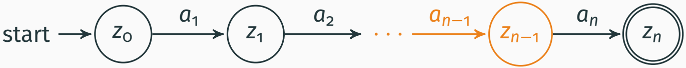

Mit den passenden Regeln (z.B. $z_2 \longrightarrow a_3z_3$) lässt sich $x$ ableiten:

$$z_0 \Longrightarrow a_1z_1 \Longrightarrow a_1a_2z_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow a_1a_2 \ldots a_{n-1}z_{n-1} \Longrightarrow a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n = x$$

## DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.



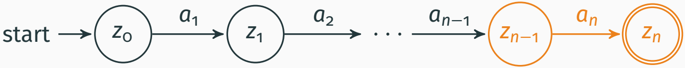

Mit den passenden Regeln (z.B. $z_{n-2} \longrightarrow a_{n-1} z_{n-1}$) lässt sich $x$ ableiten:

$$z_0 \Longrightarrow a_1 z_1 \Longrightarrow a_1 a_2 z_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} z_{n-1} \Longrightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = x$$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.



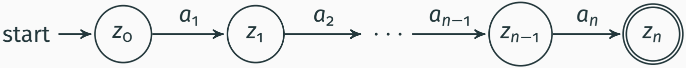

Mit den passenden Regeln (z.B. $z_{n-1} \longrightarrow a_n$) lässt sich $x$ ableiten:

$$z_0 \Longrightarrow a_1 z_1 \Longrightarrow a_1 a_2 z_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} z_{n-1} \Longrightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = x$$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.




Mit den passenden Regeln lässt sich $x$ ableiten:

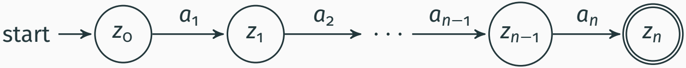
$$z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow a_1 a_2 z_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = x$$

Also können wir das Wort in der Grammatik ableiten.

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.




Mit den passenden Regeln lässt sich $x$ ableiten:

$$z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow a_1 a_2 z_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = x$$

Also können wir das Wort in der Grammatik ableiten.

Funktioniert die Argumentation auch andersrum?

# DEA zu Grammatik: Korrektheit (Beweisidee)

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$

Sei $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ ein Wort, das von $M$ akzeptiert wird.

$$\text{start} \longrightarrow z_0 \xrightarrow{a_1} z_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} z_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_n$$

Mit den passenden Regeln lässt sich $x$ ableiten:

$$z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow a_1 a_2 z_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = x$$

Also können wir das Wort in der Grammatik ableiten.

Funktioniert die Argumentation auch andersrum? Ja!

# DEA zu Grammatik: Korrektheit

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$
Dabei gilt immer noch: $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$
Dabei gilt immer noch: $x = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

# DEA zu Grammatik: Korrektheit

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$
Dabei gilt immer noch: $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $x$ wird von Automat $M$ erkannt $(x \in T(M))$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$
Dabei gilt immer noch: $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $x$ wird von Automat $M$ erkannt $(x \in T(M))$
- Es gibt eine Folge von Zuständen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$ mit: $z_0$ ist Startzustand, $z_n$ ist Endzustand **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$
Dabei gilt immer noch: $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $x$ wird von Automat $M$ erkannt $(x \in T(M))$
- Es gibt eine Folge von Zuständen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$ mit: $z_0$ ist Startzustand, $z_n$ ist Endzustand **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$
- Es gibt Folge an Variablen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit: $z_0$ ist Startvariable, $(z_{n-1} \longrightarrow a_n) \in P$ **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : (z_{i-1} \longrightarrow a_i z_i) \in P$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$
Dabei gilt immer noch: $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $x$ wird von Automat $M$ erkannt $(x \in T(M))$
- Es gibt eine Folge von Zuständen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$ mit: $z_0$ ist Startzustand, $z_n$ ist Endzustand **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$
- Es gibt Folge an Variablen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit: $z_0$ ist Startvariable, $(z_{n-1} \longrightarrow a_n) \in P$ **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : (z_{i-1} \longrightarrow a_i z_i) \in P$
- Es gibt Folge an Variablen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit: $z_0$ ist Startvariable **und**: $z_0 \Longrightarrow a_1 z_1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$
Dabei gilt immer noch: $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $x$ wird von Automat $M$ erkannt $(x \in T(M))$
- Es gibt eine Folge von Zuständen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$ mit: $z_0$ ist Startzustand, $z_n$ ist Endzustand **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$
- Es gibt Folge an Variablen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit: $z_0$ ist Startvariable, $(z_{n-1} \rightarrow a_n) \in P$ **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : (z_{i-1} \rightarrow a_i z_i) \in P$
- Es gibt Folge an Variablen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit: $z_0$ ist Startvariable **und**: $z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$
- x wird von der Grammatik G produziert $(x \in L(G))$

# DEA zu Grammatik: Korrektheit

**Zu zeigen:** $x \in T(M)$ **gdw.** $x \in L(G)$
Dabei gilt immer noch: $x = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $x$ wird von Automat $M$ erkannt $(x \in T(M))$
- Es gibt eine Folge von Zuständen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$ mit: $z_0$ ist Startzustand, $z_n$ ist Endzustand **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$
- Es gibt Folge an Variablen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit: $z_0$ ist Startvariable, $(z_{n-1} \longrightarrow a_n) \in P$ **und**: $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : (z_{i-1} \longrightarrow a_i z_i) \in P$
- Es gibt Folge an Variablen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit: $z_0$ ist Startvariable **und**: $z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$
- x wird von der Grammatik G produziert $(x \in L(G))$

Also gilt die Äquivalenz. $\square$

# Online-Whiteboard