Vorkurs Theoretische Informatik

Einführung in reguläre Sprachen

Arbeitskreis Theo Vorkurs

Donnerstag, 14.10.2021

Fachgruppe Informatik

Übersicht

1. Chomsky-Hierarchie
2. Automaten
   - NEA
   - DEA
3. Wiederholung

Chomsky-Hierarchie

Manche Sprachen sind schwerer zu beschreiben als andere

Wenn wir unsere Grammatiken einschränken, können wir weniger Sprachen beschreiben.

Beispiel

Mit der Einschränkung

Alle Produktionsregeln müssen der Form $A \longrightarrow a$ oder $A \longrightarrow aB$ entsprechen, wobei $A, B \in V$ und $a \in \Sigma$.

können wir Sprachen wie $L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschreiben,

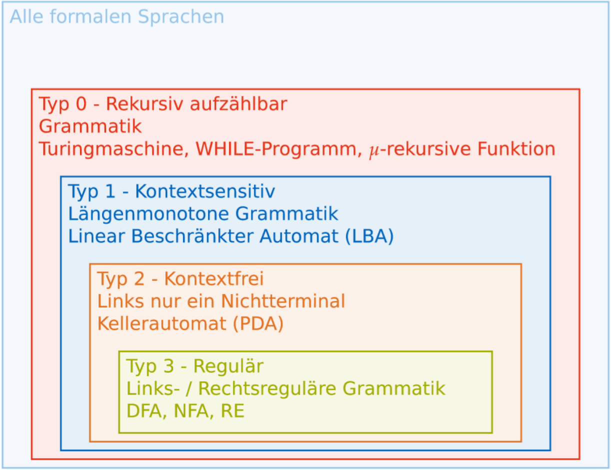
aber nicht mehr Sprachen wie $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Achtung: ist $\varepsilon \in L$, ist auch $S \longrightarrow \varepsilon$ erlaubt, sofern S nicht auf der rechten Seite einer Produktion vorkommt.

$\rightsquigarrow$ Sprachen, die wir mit dieser starken Einschränkung beschreiben können, nennen wir *regulär* oder vom *Typ 3*.

Es gibt weitere Typen $\rightsquigarrow$ Mehr dazu in der Vorlesung

Manche Sprachen sind schwerer zu beschreiben als andere



Reguläre Grammatik

Aufgaben

Finde Produktionsregeln, die in regulären Grammatiken erlaubt wären, für die folgenden Sprachen

Normal

- $L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = \{uv \mid u \in \{a, b\}^*,\ v \in \{c, d\}\}$
- $L_4 = \{w \mid |w| = 3, w \in \{a, b, c\}^*\}$

Etwas Schwerer

- $L_5 = \{a^n \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$
- $L_6 = \{uv \mid u \in \{◀, ▲, ▶, ▼\}^*,\ v \in \{🛑\}\}$
- $L_7 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = 3, |w|_b = 1\}$

Lösung

- $P_1 = \{S \longrightarrow aA \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aB \mid a,\ B \longrightarrow aA\}$

Lösung

- $P_1 = \{S \longrightarrow aA \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aB \mid a,\ B \longrightarrow aA\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a,\ B \longrightarrow bB \mid b\}$

Lösung

- $P_1 = \{S \longrightarrow aA \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aB \mid a,\ B \longrightarrow aA\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a,\ B \longrightarrow bB \mid b\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid c \mid d\}$

Lösung

- $P_1 = \{S \longrightarrow aA \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aB \mid a,\ B \longrightarrow aA\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a,\ B \longrightarrow bB \mid b\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \longrightarrow aA \mid bA \mid cA,\ A \longrightarrow aB \mid bB \mid cB,\ B \longrightarrow a \mid b \mid c\}$

Lösung

- $P_1 = \{S \longrightarrow aA \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aB \mid a,\ B \longrightarrow aA\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a,\ B \longrightarrow bB \mid b\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \longrightarrow aA \mid bA \mid cA,\ A \longrightarrow aB \mid bB \mid cB,\ B \longrightarrow a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \longrightarrow aA \mid a,\ A \longrightarrow aB,\ B \longrightarrow aS\}$

Lösung

- $P_1 = \{S \longrightarrow aA \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aB \mid a,\ B \longrightarrow aA\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a \mid \varepsilon,\ A \longrightarrow aA \mid bB \mid b \mid a,\ B \longrightarrow bB \mid b\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \longrightarrow aA \mid bA \mid cA,\ A \longrightarrow aB \mid bB \mid cB,\ B \longrightarrow a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \longrightarrow aA \mid a,\ A \longrightarrow aB,\ B \longrightarrow aS\}$
- $P_6 = \{S \longrightarrow \blacktriangleleft S \mid \blacktriangle S \mid \blacktriangleright S \mid \blacktriangledown S \mid \text{STOP}\}$

Lösung

- $P_7 = \{S \longrightarrow cS \mid aA_1 \mid bB_0,$
  $A_1 \longrightarrow cA_1 \mid aA_2 \mid bB_1,$
  $A_2 \longrightarrow cA_2 \mid aA_3 \mid bB_2,$
  $A_3 \longrightarrow cA_3 \mid bB_3 \mid b,$
  $B_0 \longrightarrow cB_0 \mid aB_1,$
  $B_1 \longrightarrow cB_1 \mid aB_2,$
  $B_2 \longrightarrow cB_2 \mid aB_3 \mid a,$
  $B_3 \longrightarrow cB_3 \mid c\}$

Murmelpause

Automaten

Reguläre Sprachen anders beschreiben

Wir können reguläre Sprachen auch graphisch beschreiben.

Dafür nutzen wir endliche Automaten.

Ein Automat prüft Wörter und entscheidet, ob sie Teil der Sprache sind oder nicht.

$\rightsquigarrow$ Wir nennen das *akzeptieren*, bzw. nicht akzeptieren.

Funktionsweise

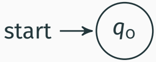
1. Ein Wort wird in den Automat eingegeben
2. Wort wird zeichenweise abgearbeitet
3. Nach jedem Zeichen wird der Automat in einen Zustand überführt, der bestimmt, wie fortgefahren wird
4. Befindet sich der Automat in einem *Endzustand*, sobald das Wort abgearbeitet wurde, akzeptiert der Automat das Wort.

Bestandteile eines endlichen Automaten

Der Automat kann als gerichteter Graph notiert werden.

Wir konstruieren ihn aus den folgenden Komponenten:

Startzustand
Im Startzustand wird das Wort eingegeben.



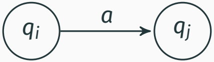
Bestandteile eines endlichen Automaten

Der Automat kann als gerichteter Graph notiert werden.

Wir konstruieren ihn aus den folgenden Komponenten:

Zustandsübergang

Wird das Zeichen auf dem Übergang *gelesen*, geht der Automat in den folgenden Zustand über.



Bestandteile eines endlichen Automaten

Der Automat kann als gerichteter Graph notiert werden.

Wir konstruieren ihn aus den folgenden Komponenten:

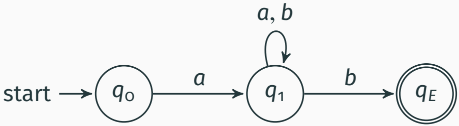
Endzustand

Falls sich der Automat in diesem Zustand befindet, und das Wort abgearbeitet ist, wird das Wort akzeptiert.

Anmerkung: Unter Umständen sind mehrere hiervon nötig

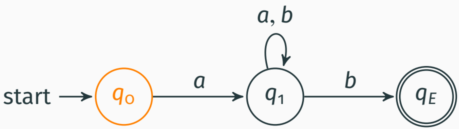
Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$



Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$

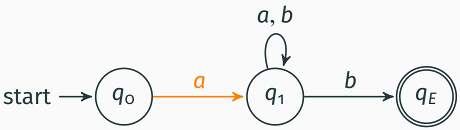


Worteingabe:

$aababb \in L?$

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$

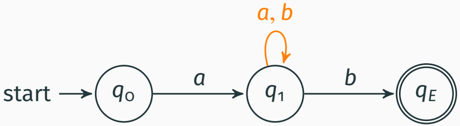


Worteingabe:

$aababb \in L?$

Beispiel

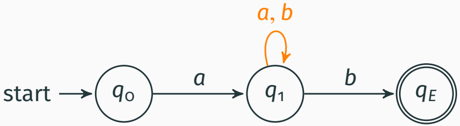
$L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$



Worteingabe:

$aababb \in L?$

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$

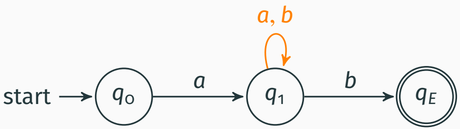


Worteingabe:

$aababb \in L$?

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$

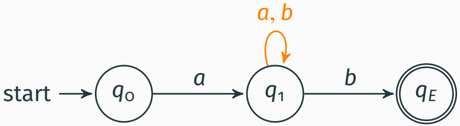


Worteingabe:

$aababb \in L?$

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$



Worteingabe:

$aababb \in L?$

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$

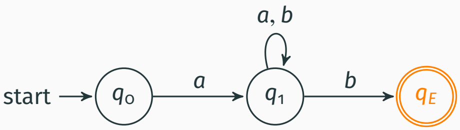
$$
\begin{tikzcd}
\text{start} \arrow[r] & q_0 \arrow[r, "a"] & q_1 \arrow[loop above, "{a, b}"] \arrow[r, "b"] & q_E
\end{tikzcd}
$$

Worteingabe:

$aababb \in L$?

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$



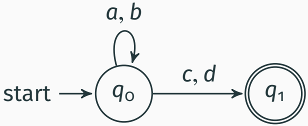
Worteingabe:

$aababb \in L \leadsto$ akzeptiert

Beispiel: Automat

Gegeben ist eine Sprache L. Gesucht ist ein Automat M, der **genau** die Wörter aus L akzeptiert.

$L_1 = \{uv \mid u \in \{a, b\}^*,\ v \in \{c, d\}\}$



Denkpause

knifflige Aufgabe

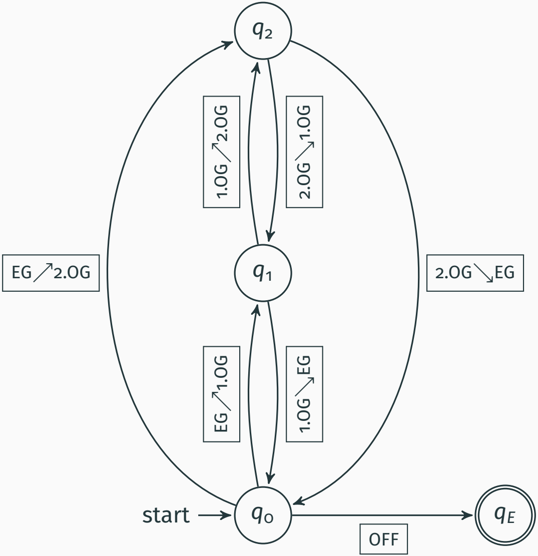
Wir entwerfen einen Automat zur Aufzugskontrolle. Der Aufzug hat folgende Möglichkeiten:

$$\Sigma = \{ \boxed{\text{EG}\nearrow\text{1.OG}}, \boxed{\text{EG}\nearrow\text{2.OG}}, \boxed{\text{1.OG}\searrow\text{EG}}, \boxed{\text{1.OG}\nearrow\text{2.OG}}, \boxed{\text{2.OG}\searrow\text{EG}}, \boxed{\text{2.OG}\searrow\text{1.OG}}, \boxed{\text{OFF}} \}$$

- Der Aufzug startet vom Erdgeschoss und darf sich nur aus Stockwerken bewegen, in denen er sich befindet.
- Der Aufzug kann nur im Erdgeschoss ausgeschaltet werden. Er kann dann keine Bewegung durchführen.
- Der Aufzug muss ausgeschaltet werden.

Zeichne einen Automaten an, dessen akzeptierte Sprache genau die Menge der korrekten Abläufe ist.

Lösung



Aufgaben

Finde Automaten, die **genau** folgende Sprachen erkennen.

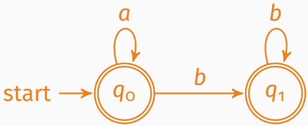
Normal

- $L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{w \mid |w| = 3, w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $L_3 = \{uv \mid u \in \{\blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}^*,\ v \in \{\text{🛑}\}\}$

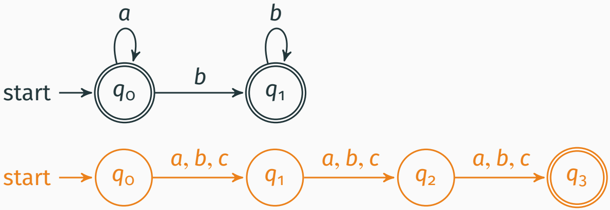
Etwas Schwerer

- $L_4 = \{a^n \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$
- $L_5 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = 3, |w|_b = 1\}$
- $L_6 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \equiv |w|_b \pmod 3\}$

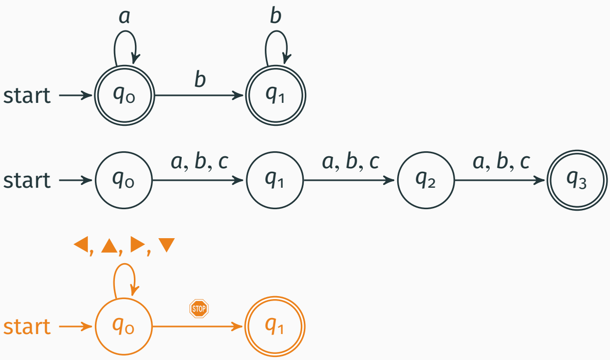
Lösung



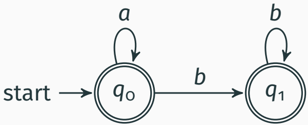
Lösung

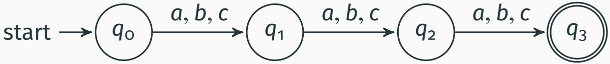


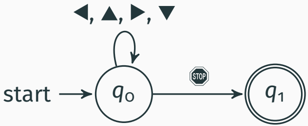
Lösung

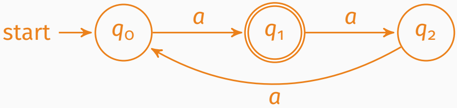


Lösung

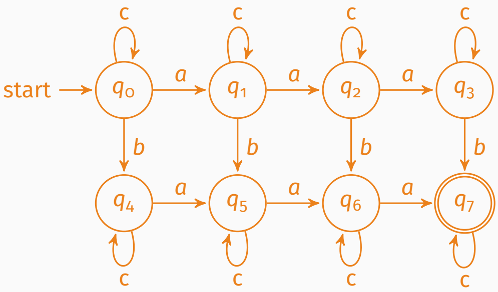

a
b
start
b
q_0
q_1


start
q_0
a, b, c
q_1
a, b, c
q_2
a, b, c
q_3

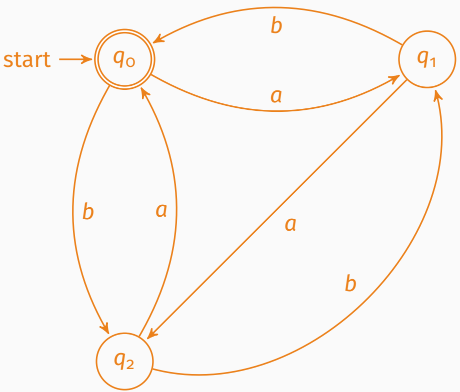

◀, ▲, ▶, ▼
start
q_0
STOP
q_1


start
q_0
a
q_1
a
q_2
a

Lösung



Lösung



Murmelpause

Verschiedene endliche Automaten

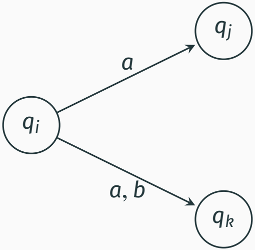
NEA
Beim Lesen eines Wortes ist es manchmal unklar, welchen Übergang der Automat nehmen soll.
$\leadsto$ Der Automat ist *nichtdeterministisch*.

DEA
Wir können unsere Möglichkeiten so einschränken, dass bei jedem Zeichen eindeutig ist, welcher Übergang genutzt wird.
$\leadsto$ Der Automat ist *deterministisch*.

Unterschied NEA und DEA

Bildlich kann man den Unterschied zwischen NEA und DEA an verschiedenen Merkmalen erkennen:

Mehrere Möglichkeiten bei Übergängen:

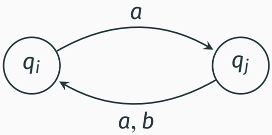


Bei einem DEA wäre nur ein Weg mit einem a von dem Zustand q_i aus erlaubt!

Unterschied NEA und DEA

Bildlich kann man den Unterschied zwischen NEA und DEA an verschiedenen Merkmalen erkennen:

Nicht definierte Übergänge

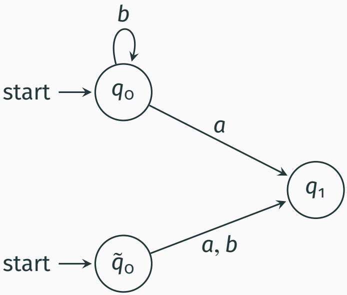


Bei einem DEA müsste ein Übergang mit b für den Zustand q_i definiert werden!

Unterschied NEA und DEA

Bildlich kann man den Unterschied zwischen NEA und DEA an verschiedenen Merkmalen erkennen:

Mehrere Startzustände

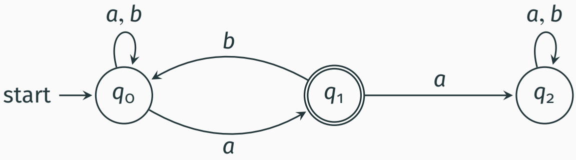


Ein DEA muss genau einen Startzustand besitzen!

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

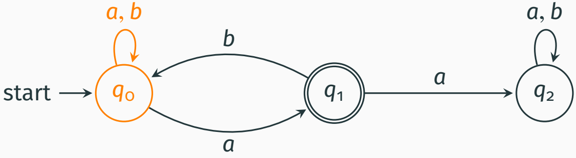
Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?

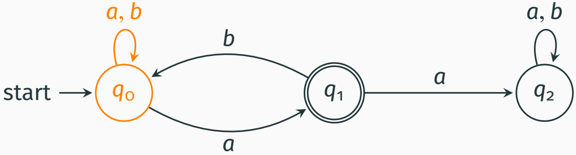


i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?

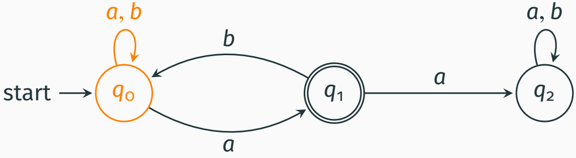


i) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?

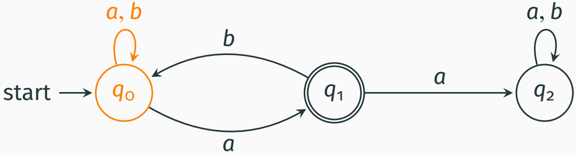


i) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?

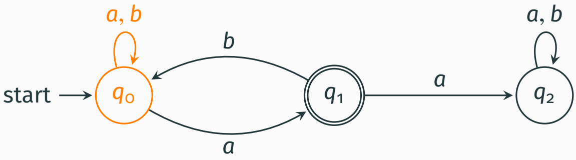


i) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?

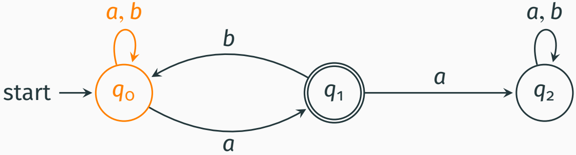


i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



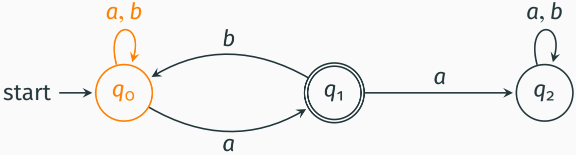
i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



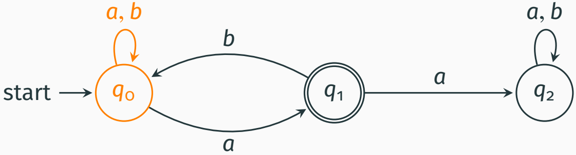
i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



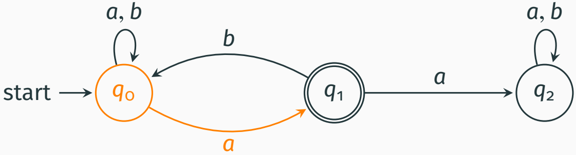
i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



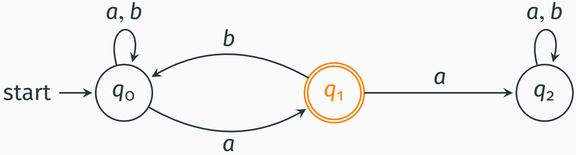
i) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$

ii) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



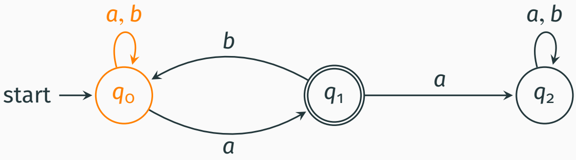
i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

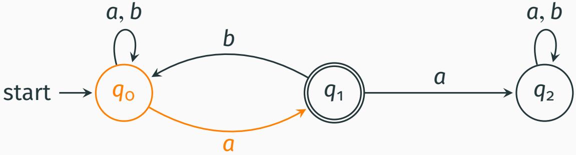
ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

iii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



i) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$

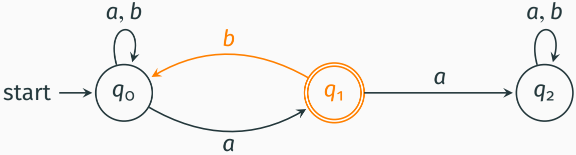
ii) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)

iii) $q_0 \to q_0 \to q_1 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



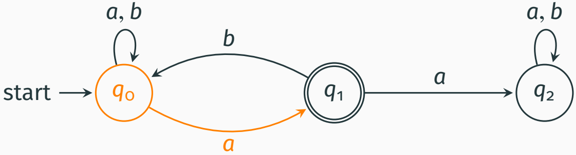
i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

iii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?

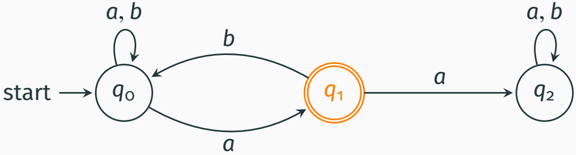


i) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$
ii) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)
iii) $q_0 \to q_0 \to q_1 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

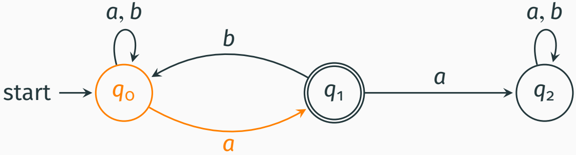
ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

iii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

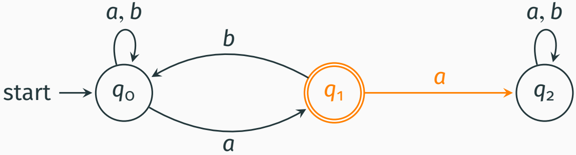
iii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

iv) $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow q_2 \rightarrow q_2$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



i) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$

ii) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)

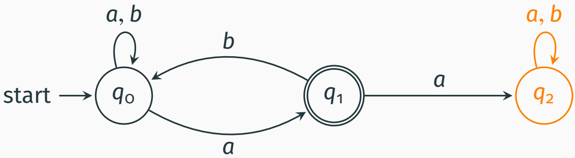
iii) $q_0 \to q_0 \to q_1 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)

iv) $q_0 \to q_1 \to q_2 \to q_2 \to q_2$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

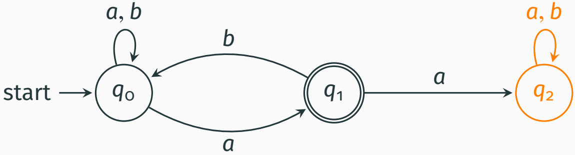
iii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

iv) $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow q_2 \rightarrow q_2$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



i) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0$

ii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

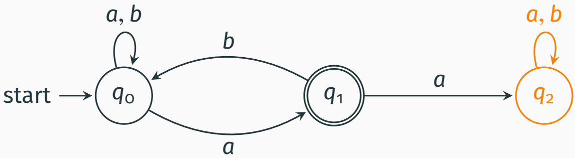
iii) $q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ (Endzustand erreicht)

iv) $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow q_2 \rightarrow q_2$

Wann wird ein Wort akzeptiert?

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem NEA akzeptiert, wenn es mindestens einen akzeptierenden Pfad gibt.

Beispiel
Welche Zustände können erreicht werden, wenn $w = aaba$ eingelesen wird?



i) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0$

ii) $q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)

iii) $q_0 \to q_0 \to q_1 \to q_0 \to q_1$ (Endzustand erreicht)

iv) $q_0 \to q_1 \to q_2 \to q_2 \to q_2$

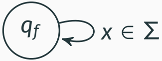
Wir beschränken unseren Automaten folgendermaßen:
Von jedem Zustand muss genau ein Übergang für jedes $a \in \Sigma$ ausgehen.

Wir beschränken unseren Automaten folgendermaßen:
Von jedem Zustand muss genau ein Übergang für jedes $a \in \Sigma$ ausgehen.

Um dies zu ermöglichen führen wir eine neue Komponente ein:

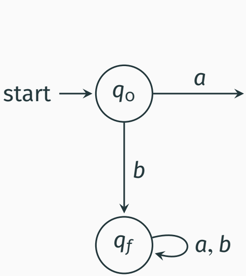
Fangzustand
Dieser Zustand kann nicht verlassen werden.

Falls der Automat in diesem Zustand landet, kommt er nicht mehr raus. Das Wort kann nicht akzeptiert werden.



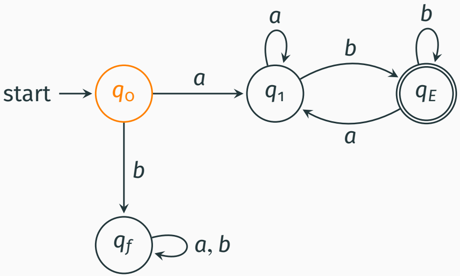
Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$



Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$

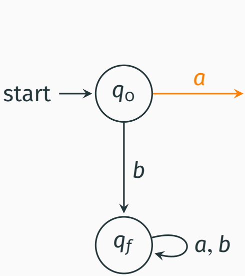


Worteingabe:

$aababb \in L?$

Beispiel

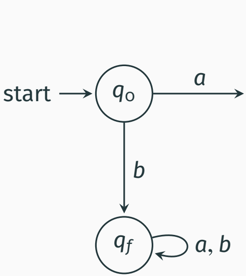
$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$



Worteingabe:

$aababb \in L?$

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$

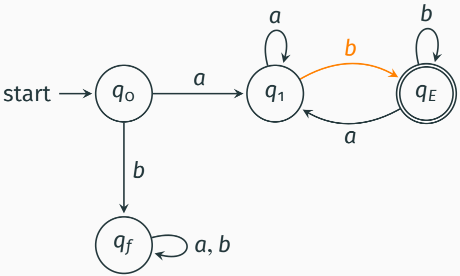


Worteingabe:

$aababb \in L?$

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$

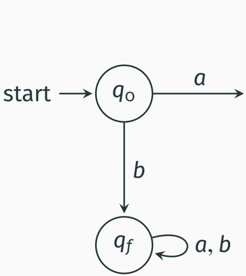


Worteingabe:

$aababb \in L$?

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a,b\}^*\}$

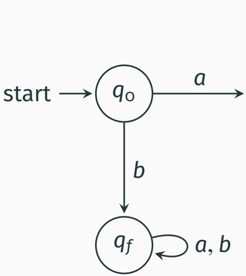


Worteingabe:

$aababb \in L?$

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$

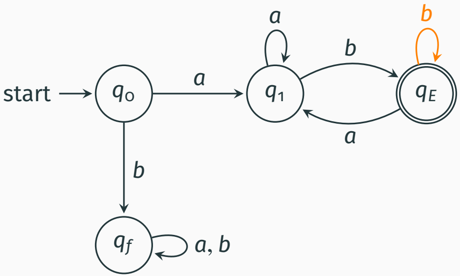


Worteingabe:

$aababb \in L?$

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$

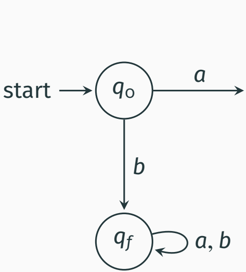


Worteingabe:

$aabab\textcolor{orange}{b} \in L?$

Beispiel

$L = \{axb \mid x \in \{a, b\}^*\}$



Worteingabe:

$aababb \in L \rightsquigarrow$ akzeptiert

Denkpause

Aufgaben

Finde deterministische endliche Automaten (DEAs) für die folgenden Sprachen.

Normal

- $L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a\}$
- $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$

Prüfungsaufgabe: Etwas Schwerer

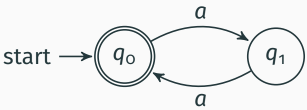
- $L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \ |w|_b \geq 1$ und $aaca$ ist Suffix von w$\}$ über $\Sigma = \{a, b, c\}$

Prüfungsaufgabe: Schwer

- $L_4 = \{bin(n) \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 4k, bin(n)$ ist Binärdarstellung von $n\}$ über $\Sigma = \{1, 0\}$
  Achtung: Keine führenden Nullen.

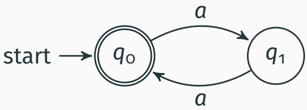
Lösung: Normal

$L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

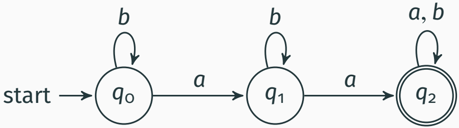


Lösung: Normal

$L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

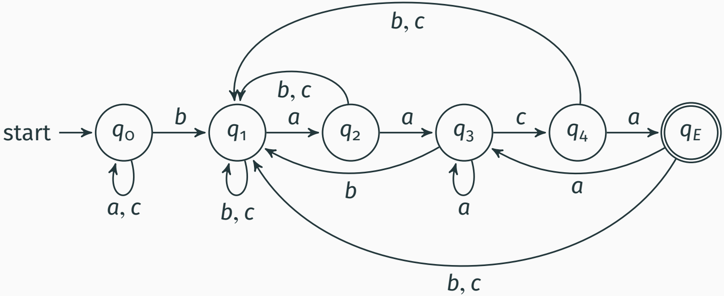


$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$



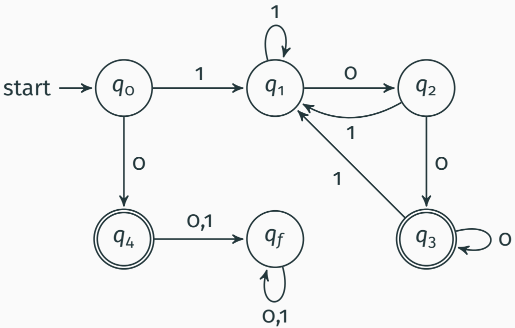
Lösung: Prüfungsaufgabe: Etwas Schwerer

$L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \ |w|_b \geq 1$ **und** $aaca$ **ist Suffix von w**$\}$



Lösung: Prüfungsaufgabe: Schwer

$L_4 = \{bin(n) \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 4k, bin(n)$ **ist Binärdarstellung von** $n\}$



Wiederholung

Das können wir jetzt beantworten

Reguläre Grammatiken

- Wie sehen Produktionsregeln für reguläre Grammatiken aus?
- Bilden einer regulären Grammatik für gegebene, reguläre Sprache

Das können wir jetzt beantworten

Automaten

- Was sind Automaten?
- Wie wandelt man Automaten zu einer äquivalenten Grammatik um?
- Was macht einen deterministischen Automaten aus?
- Finden eines (deterministischen) Automaten für gegebene Sprache

Noch Fragen?

Glossar

Abk.	Bedeutung	Was?!
start $\rightarrow q_0$	Startzustand	Hier fängt der Automat beim Lesen eines Wortes an
$q_i \xrightarrow{a} q_j$	Zustandsübergang	gibt an, welches Symbol eingelesen werden kann, um in den Folgezustand zu übergehen.
q_E	Endzustand	Hier kann ein fertig gelesenes Wort akzeptiert werden.
q_f $x \in \Sigma$	Fangzustand	wird benötigt, um Determinismus zu gewährleisten. In Graphiken oft nicht eingezeichnet, ist aber da. Malt den hin.

Online-Whiteboard