Vorkurs Theoretische Informatik

Induktion und Einführung in die Grammatik

Arbeitskreis Theo Vorkurs

Mittwoch, 13.10.2021

Fachgruppe Informatik

Übersicht

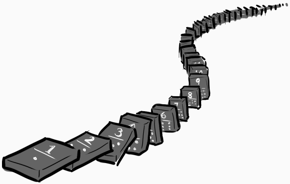
Vollständige Induktion

Idee

Zeige Aussagen der Form:

Für alle** $n \in \mathbb{N}$ **gilt...

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
5. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
6. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
7. ...



Struktur

Zeige Aussagen der Form:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

1. Induktionsanfang

   Zeige Aussage für das kleinste Element

2. Induktionsvorraussetzung

   Zeige, unter der Vorraussetzung:

   die Aussage gelte für beliebiges n*,...*

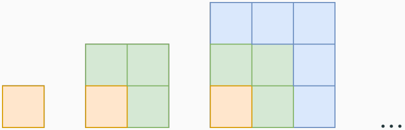
3. Induktionsschritt

   ...dann gilt die Aussage auch für dessen Nachfolger $n + 1$.

4. $\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Beispiel

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang IA
Zeige Aussage gilt für $n := 0$:

$$\sum_{i=0}^{0}(2i+1) \stackrel{!}{=} (0+1)^2$$

$$\iff 2 * 0 + 1 \stackrel{!}{=} 1^2$$

$$\iff 1 = 1 \qquad \checkmark$$

Beispiel

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang IA
Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2$

Induktionsvorraussetzung IV
Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt IS
Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:
$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) \overset{!}{=} ((n+1)+1)^2$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) && \overset{!}{=} ((n+1)+1)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) && \overset{!}{=} (n+2)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \overset{!}{=} n^2 + 2 * 2n + 2^2 \\
\overset{IV}{\iff} & (n+1)^2 + (2(n+1)+1) && \overset{!}{=} n^2 + 4n + 4 \\
\iff & n^2 + 2n + 1^2 + 2n + 2 + 1 && \overset{!}{=} n^2 + 4n + 4 \\
\iff & n^2 + 4n + 4 && = n^2 + 4n + 4
\end{aligned}
$$

Beispiel

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang IA
Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 1^2$

Induktionsvorraussetzung IV
Ang. Aussage gilt für ein (beliebiges aber festes) $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt IS
Aussage gilt für alle n+1 unter Nutzung der I.V., da
$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = ((n+1)+1)^2$

$\leadsto$ Aussage gilt für alle n. $\square$

Denkpause

Aufgaben
Versuche dich an den folgenden Induktionsbeweisen.

Normal

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Schwerer

$$\prod_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n(n+1)}, \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (P(n_0) \land \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (P(n) \implies P(n+1)))$$

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$
2. **IS:** Sei $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ beliebig. Ang. es gilt $P(n)$. **(IV)**
3. $\rightsquigarrow$ Zeigen, dass $P(n+1)$ gilt, unter Verwendung von $P(n)$ **(IV)**

Aufgabe

Die folgende Induktion zeigt eine seltsame Aussage.

Ist der Beweis korrekt geführt? Was ist passiert?

Sei $A(n)$:= In einer Herde aus n Telefonen haben alle die selbe Farbe. Zu zeigen: $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsanfang IA
$A(1)$: Aussage gilt für $n := 1$, da ein Telefon nur eine Farbe haben kann.

Induktionsvorraussetzung IV
Ang. $A(n)$ gilt für $n \geq 1$.

Induktionsschritt IS
Zeige Aussage gilt für alle $n + 1$ unter Nutzung der I.V.

d.h. wir zeigen $A(n+1)$ = In einer Herde aus $n + 1$ Telefonen haben alle die selbe Farbe.

Aufgabe

Induktionsschritt IS

Wir betrachten eine Herde aus $n+1$ Telefonen:

$$\underbrace{\text{☎☎☎☎☎}\ldots\text{☎☎}}_{n+1}$$

Wir sondern ein Telefon aus und betrachten den Rest. Nach I.V. haben diese alle die selbe Farbe.

$$\underbrace{\text{☎☎☎☎☎}\ldots\text{☎}}_{n}\text{☎}$$

Jetzt sondern wir ein anderes Telefon aus.

$$\text{☎}\underbrace{\text{☎☎☎☎}\ldots\text{☎☎}}_{n}$$

Die übrigen n Telefone haben nach I.V. wieder die selbe Farbe.

$$\underbrace{\text{☎☎☎☎☎}\ldots\text{☎☎}}_{n+1}$$

Also haben alle $n+1$ Telefone die selbe Farbe. $\leadsto A(n)$ gilt für alle n.

Grammatiken

Wörter in Sprachen

Wir können inzwischen Sprachen in Mengenschreibweise darstellen.
Aber welche Wörter sind enthalten?

Wir können weitere Regeln formulieren, mit denen wir von einem gegebenen Startpunkt aus alle Wörter einer Sprache erzeugen können.

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a,b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = ababbbbaba ∈ L.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$

$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben.
   z.B.: ababbbbaba $\rightsquigarrow$ SaSaabSbaabaSabaababSbabaababbbbaba
4. Wir nennen diese Umformungsregeln Produktionsregeln.

Produktionsregeln

Einschränkungen

- *Nichtterminale* werden meist durch Großbuchstaben repräsentiert und müssen durch Produktionsregeln abgeändert werden
- *Terminale* werden meist durch Kleinbuchstaben repräsentiert und sollten *nicht* durch weitere Produktionsregeln abgeändert werden
- Mehrere Symbole können auf einen Schlag überführt werden. Dabei sollten die Terminale nicht entfernt oder umsortiert werden.
  z.B. $AB \longrightarrow CD$ ist erlaubt.
  Auch $abAB \longrightarrow BbAa$, aber das gehört sich nicht.

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon\}$

$L_3 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\longrightarrow ABC, \\
A &\longrightarrow aA \mid \varepsilon, \\
B &\longrightarrow bb, \\
C &\longrightarrow cC \mid \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

Aufgaben

Findet Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

Normal

- $L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = \{uv \mid u \in \{a, b\}^*,\ v \in \{c, d\}\}$
- $L_4 = \{w \mid |w| = 3, w \in \{a, b, c\}^*\}$

Etwas Schwerer

- $L_5 = \{a^n \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$
- $L_6 = \{w \mid |w|_a = 3, |w|_b = 1, w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $L_7 = \{uv \mid u \in \{\blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}^*,\ v \in \{\text{STOP}\}\}$
- $L_8 = \{w \mid |w| = 2, w \in \{a, b\}\}$

Formale Notation

Wir beschreiben eine *Grammatik* durch ein geordnetes *Tupel* $G = (V, \Sigma, P, S)$

- V ist die Menge der verwendeten Nichtterminale
- Σ die Menge der Terminale bzw. unser Alphabet
- P ist die Menge der Produktionsregeln
- S ist die Startvariable

Beispiel für L = {$ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n,\ n \geq 1$}

$G = (V, \Sigma, P, S)$, mit

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$P = \{S \longrightarrow aSa, S \longrightarrow bSb, S \longrightarrow aa, S \longrightarrow bb\}$

bzw. kurz: $P = \{S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$

Denkpause

knifflige Aufgabe

Bob will durch das Labyrinth laufen. Er hat folgende Möglichkeiten:

$\Sigma = \{\blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}$

- Bob kann nicht auf ein Feld zurücktreten von dem er gerade kam
- Bob geht bei jedem Schritt ein Feld in die angegebene Richtung

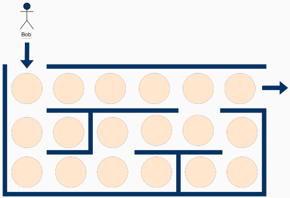


Abbildung 2: Bob's Problem

Geben Sie eine Grammatik an, welche die Sprache beschreibt, die Bob durch alle ihm möglichen Wege des Labyrinths führt.

Beispiel

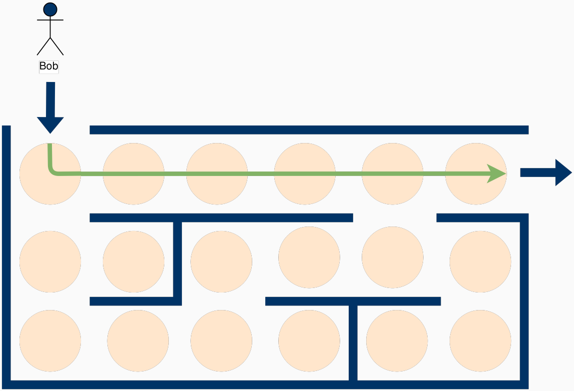


Abbildung 3: der direkte Weg ist repräsentiert durch das Wort ▼▶▶▶▶▶▶

Ableiten

Wir können durch das Ableiten formal zeigen, dass ein Wort von einer Grammatik erzeugt wird.

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$

mit der Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

$V = \{S\}, \Sigma = \{a, b\}, P = \{S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$

Beispiel

Wir zeigen $ww^R = ababbbbaba \in$ L.

$S \Longrightarrow_G aSa \Longrightarrow_G abSba \Longrightarrow_G abaSaba \Longrightarrow_G ababSbaba$

$\Longrightarrow_G ababbbbaba$

□

Denkpause

Aufgaben

Zeige.

Normal

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$ erzeugt $aaaa$
- $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$ erzeugt $aabbc$
- $P_3 = \{S \longrightarrow UV, U \longrightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \longrightarrow c \mid d\}$ erzeugt $abac$
- $P_4 = \{S \longrightarrow XXX, X \longrightarrow a \mid b \mid c\}$ erzeugt aac

Etwas Schwerer

- $P_5 = \{S \longrightarrow a \mid aaaS\}$ erzeugt $aaaa$
- $P_6 = \{S \longrightarrow AAAB, AB \longrightarrow BA, A \longrightarrow cA \mid Ac \mid a, B \longrightarrow cB \mid Bc \mid b\}$ erzeugt $cabcacca$
- $P_7 = \{S \longrightarrow U\text{🛑} \mid \text{🛑}, U \longrightarrow \blacktriangleleft U \mid \blacktriangle U \mid \blacktriangleright U \mid \blacktriangledown U \mid \varepsilon\}$ erzeugt $\blacktriangleright\text{🛑}$

Wiederholung

Das können wir jetzt beantworten

Vollständige Induktion

- Was ist die Idee der Induktion?
- Welche Schritte hat die Induktion?
- Für welche Aussagen ist die Induktion geeignet?

Das können wir jetzt beantworten

Grammatiken

- Was sind Grammatiken?
- Was ist der Zusammenhang zwischen Grammatiken und Sprachen?
- Was sind Nichtterminale?
- Was sind Terminale?
- Bilden einer Grammatik für gegebene Sprache
- Wie finde ich raus, ob ein Wort von einer Grammatik erzeugt wird?

Glossar

Abk.	Bedeutung	Was?!
$A \subseteq B$	Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Dabei können die Mengen auch gleich sein.
$A \subsetneq B$	echte Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Jedoch enthält B noch Elemente, die nicht in A enthalten sind. $\implies$ Mengen sind nicht gleich!
$A \subset B$	Teilmenge *oder* echte Teilmenge	Bei manchen Leuten $\subseteq$, bei manchen $\subsetneq$. Mehrdeutig, lieber nicht verwenden!